20) Determinar m e n para que se tenha

a) $(m, n, 2) \cdot (4, -1, 3) = -2$

b) $(m, n, 2) \times (4, -1, 3) = (8, -1, -11)$

c) $(m, n, 2) \cdot ((3, 1, 2) \times (0, 1, -1)) = 9$

Respostas de Problemas Propostos

1) a) -29 b) -29

2) a) 5 b) 5 c) -5 d) -5

3) a) -2 b) 2 c) 2 d) -6 e) -4 f) -2

4) a) 2 b) –36 c) 24 d) -10

5) a) Não b) Sim

6) a) 6 b) 2 ou -3

7) a) Sim b) Não

8) $m = 4$

9) 1

10) 17 e $\dfrac{17}{\sqrt{30}}$

11) $m = 4$ ou $m = -\dfrac{17}{4}$ e $h = \dfrac{33}{\sqrt{89}}$

12) 6 ou 2

13) D(0, 0, -10) ou D(0, 0, 15)

14) $\dfrac{19}{2}$ u.v.

15) 12 u.v. e 9 u.c.

16) $m = -\dfrac{17}{2}$ ou $m = \dfrac{19}{2}$

17) D(0, 2, 0) ou D(0, -4, 0)

18) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ u.c.

19) a) $\sqrt{13}$ b) $6\sqrt{3}$ c) 108 u.v.

20) a) $n = 4m + 8$ b) $m = 3$ e $n = 2$ c) $n = m + 1$

MAKRON Books

5

A Reta

Equação Vetorial da Reta

Consideremos um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto P(x, y, z) pertence a r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$ (Figura 5.1), isto é,

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \qquad (1)$$

para algum real t.

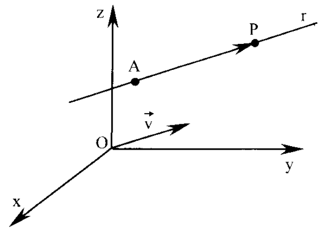


Figura 5.1

De (1), vem

$$P - A = t\vec{v}$$

ou

$$P = A + t\vec{v} \qquad (2)$$

ou, em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \qquad (3)$$

Qualquer uma das equações (1), (2) ou (3) é denominada *equação vetorial* de r.

O vetor $\vec{v}$ é chamado *vetor diretor* da reta r e t é denominado *parâmetro*.

Exemplo

A reta r que passa por A(1, -1, 4) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$, tem equação vetorial, de acordo com (3):

$$r: (x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2) \qquad (4)$$

onde (x, y, z) representa um ponto qualquer de r.

Se desejarmos obter pontos de r, basta atribuir valores para t. Por exemplo,

para $t = 1$, obtém-se $(x, y, z) = (1, -1, 4) + 1(2, 3, 2) = (1, -1, 4) + (2, 3, 2) = (3, 2, 6)$

e, portanto, $P_1(3, 2, 6) \in r$.

De forma análoga,

para $t = 2$, obtém-se $(x, y, z) = (1, -1, 4) + 2(2, 3, 2) = (5, 5, 8)$

e, portanto, $P_2(5, 5, 8) \in r$;

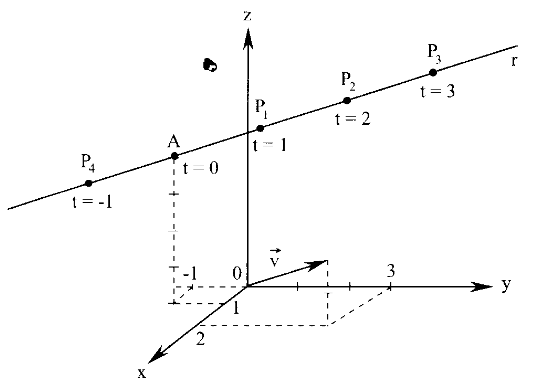
para $t = 3$, obtém-se o ponto $P_3(7, 8, 10)$;

para $t = 0$, obtém-se o próprio ponto $A(1, -1, 4)$;

para $t = -1$, obtém-se o ponto $P_4(-1, -4, 2)$;

e assim por diante. Se t assumir todos os valores reais, teremos todos os infinitos pontos da reta.

A Figura 5.2 mostra os pontos obtidos com seus correspondentes parâmetros.



De acordo com
$P = A + t\,\vec{v}$
tem-se
$P_1 = A + (1)\,\vec{v}$
$P_2 = A + (2)\,\vec{v}$
$P_3 = A + (3)\,\vec{v}$
$P_4 = A + (-1)\,\vec{v}$
$A = A + (0)\,\vec{v}$

Figura 5.2

Observações

a) Vimos que a cada real t corresponde um ponto $P \in r$. A recíproca também é verdadeira, isto é, a cada $P \in r$ corresponde um número real t. Por exemplo, sabe-se que o ponto P(5, 5, 8) pertence à reta

$$r : (x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2)$$

Logo, o ponto (5, 5, 8) é um particular (x, y, z) na equação (4) e, portanto, é verdadeira a afirmação

$$(5, 5, 8) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2), \text{ para algum real } t.$$

Desta igualdade, vem

$$(5, 5, 8) - (1, -1, 4) = t(2, 3, 2)$$

ou

$$(4, 6, 4) = t(2, 3, 2)$$

e, portanto, $t = 2$.

b) A equação (4) não é a única equação vetorial de r. Existem, na verdade, infinitas, pois basta tomar outro ponto de r (em vez de A) ou outro qualquer vetor não-nulo que seja múltiplo de $\vec{v}$. Por exemplo, a equação

$$(x, y, z) = (1, -1, 4) + t(4, 6, 4)$$

é outra equação vetorial de r onde se utilizou o vetor $2\vec{v} = (4, 6, 4)$ como vetor diretor em vez de $\vec{v} = (2, 3, 2)$.

Equações Paramétricas da Reta

Da equação vetorial da reta

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

ou ainda

$$(x, y, z) = (x_1 + at,\ y_1 + bt,\ z_1 + ct),$$

pela condição de igualdade, obtém-se

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad (5)$$

As equações (5) são chamadas *equações paramétricas* da reta.

Exemplos

1) A reta r que passa pelo ponto A(3, -4, 2) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, 1, -3)$, de acordo com (5), tem equações paramétricas

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

2) Dado o ponto A(2, 3, -4) e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, pede-se:

a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.
b) Encontrar os dois pontos B e C de r de parâmetros $t = 1$ e $t = 4$, respectivamente.
c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.
d) Verificar se os pontos D(4, -1, 2) e E(5, -4, 3) pertencem a r.
e) Determinar para que valores de m e n o ponto F(m, 5, n) pertence a r.

f) Escrever outros dois sistemas de equações paramétricas de r.
g) Escrever equações paramétricas da reta s que passa por G(5, 2, -4) e é paralela a r.
h) Escrever equações paramétricas da reta t que passa por A e é paralela ao eixo dos y.

Soluções

a) De acordo com (5) temos imediatamente:

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

b) Das equações acima tem-se:

para t = 1 vem $\begin{cases} x = 2 + (1) = 3 \\ y = 3 - 2(1) = 1 \\ z = -4 + 3(1) = -1 \end{cases}$ $\therefore$ B(3, 1, -1) $\in$ r

para t = 4 vem $\begin{cases} x = 2 + (4) = 6 \\ y = 3 - 2(4) = -5 \\ z = -4 + 3(4) = 8 \end{cases}$ $\therefore$ C(6, -5, 8) $\in$ r

c) Como o ponto tem abscissa 4 (x = 4), temos
$4 = 2 + t$ (1º equação de r) e, portanto, t = 2.
Como

$$t = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2(2) = -1 \\ z = -4 + 3(2) = 2, \end{cases}$$

o ponto procurado é (4, -1, 2).

d) Um ponto pertence à reta r se existe um real t que satisfaz as equações de r.
Para D(4, -1, 2) as equações

$$\begin{cases} 4 = 2 + t \\ -1 = 3 - 2t \\ 2 = -4 + 3t \end{cases}$$

se verificam para t = 2 e, portanto, D $\in$ r.
Para E(5, -4, -3) as equações

$$\begin{cases} 5 = 2 + t \\ -4 = 3 - 2t \\ -3 = -4 + 3t \end{cases}$$

não são satisfeitas para o mesmo valor de t (t = 3 satisfaz a primeira equação mas não as duas outras). Logo, E $\notin$ r.

e) Como F $\in$ r, as equações

$$\begin{cases} m = 2 + t \\ 5 = 3 - 2t \\ n = -4 + 3t \end{cases}$$ se verificam para algum real t.

Da equação 5 = 3 - 2t, vem t = -1 e, portanto,
m = 2 + (-1) = 1
n = -4 + 3(-1) = -7

f) Tomando o ponto B(3, 1, -1) $\in$ r (item c) e o vetor diretor

$2\vec{v} = 2(1, -2, 3) = (2, -4, 6)$ tem-se

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$$

Para o ponto C(6, -5, 8) e o vetor diretor $-\vec{v} = (-1, 2, -3)$, tem-se

$$r: \begin{cases} x = 6 - t \\ y = -5 + 2t \\ z = 8 - 3t \end{cases}$$

g) Como s // r, os vetores diretores de s são os mesmos de r. Para $\vec{v} = (1, -2, 3)$, tem-se

$$s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

h) Como a reta t é paralela ao eixo dos y, um de seus vetores diretores é $\vec{j} = (0, 1, 0)$. Então,

$$t: \begin{cases} x = 2 + 0 \cdot t = 2 \\ y = 3 + 1 \cdot t = 3 + t \\ z = -4 + 0 \cdot t = -4 \end{cases}$$

Reta Definida por Dois Pontos

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passa por A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Exemplo

Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A(3, -1, -2) e B(1, 2, 4).

Solução

Escolhendo o ponto A e o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3, 6)$, tem-se

$$r: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$$

Equações Paramétricas de um Segmento de Reta

Consideremos a reta r do exemplo anterior e nela o segmento AB (origem A e extremidade B) (Figura 5.3).

Figura 5.3

As equações paramétricas do segmento AB são as mesmas da reta r, porém, com $0 \le t \le 1$, isto é,

$$AB: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t, \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

Observemos que

para t = 0, obtém-se o ponto A,

para t = 1, obtém-se o ponto B,

e para t entre 0 e 1, obtém-se os pontos entre A e B.

Se considerássemos o segmento BA, a fim de manter o mesmo intervalo de variação de t, para ponto tomaríamos o B e para vetor diretor $\overrightarrow{BA} = A - B = (2, -3, -6)$. Então,

$$BA: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4 - 6t, \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

Notemos que as equações vetoriais dos segmentos AB e BA com $0 \le t \le 1$, são

$$P = A + t(B - A) \qquad e \qquad P = B + t(A - B),$$

respectivamente, onde P(x, y, z) representa um ponto qualquer do segmento.

Observação

A equação $P = A + t(B - A)$

também pode ser expressa de modo equivalente por

$$P = tB + (1 - t)A$$

Equações Simétricas da Reta

Das equações paramétricas

$$x = x_1 + at \qquad y = y_1 + bt \qquad z = z_1 + ct$$

supondo $abc \neq 0$, vem

$$t = \frac{x - x_1}{a} \qquad t = \frac{y - y_1}{b} \qquad t = \frac{z - z_1}{c}$$

Como para cada ponto da reta corresponde um só valor para t, obtemos as igualdades

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \qquad (6)$$

As equações (6) são denominadas *equações simétricas* da reta que passa pelo ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo

A reta que passa pelo ponto A(3, 0, -5) e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2, 2, -1)$, tem equações simétricas

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z + 5}{-1}$$

Se desejarmos obter outros pontos da reta, basta atribuir um valor qualquer a uma das variáveis. Por exemplo, para x = 5, tem-se

$$\frac{5 - 3}{2} = 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + 5}{-1}$$

onde y = 2 e z = -6 e, portanto, o ponto (5, 2, -6) pertence à reta.

Equações Reduzidas da Reta

Em vez de realizar um tratamento genérico, tomaremos um caso particular.

Seja a reta r definida pelo ponto A(2, -4, -3) e pelo vetor diretor $\vec{v} = (1, 2, -3)$ e expressa pelas equações simétricas

$$r: \frac{x - 2}{1} = \frac{y + 4}{2} = \frac{z + 3}{-3} \qquad (7)$$

A partir destas equações pode-se expressar duas variáveis em função da terceira. Isolando, primeiramente, as variáveis y e z e expressando-as em função de x, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{x - 2}{1} &= \frac{y + 4}{2} \\ 1(y + 4) &= 2(x - 2) \\ y + 4 &= 2x - 4 \\ y &= 2x - 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{x - 2}{1} &= \frac{z + 3}{-3} \\ 1(z + 3) &= -3(x - 2) \\ z + 3 &= -3x + 6 \\ z &= -3x + 3 \end{aligned} \qquad (8)$$

Estas duas últimas equações são *equações reduzidas* da reta r, na variável x.

Observações

a) É fácil verificar que todo ponto $P \in r$ é do tipo P(x, 2x - 8, -3x + 3), onde x pode assumir um valor qualquer. Por exemplo, para x = 3 tem-se o ponto $P_1(3, -2, -6) \in r$.

b) Equações reduzidas na variável x serão sempre da forma

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

c) Com procedimento idêntico, a partir das equações (7), pode-se obter as equações

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 4 \\ z = -\frac{3}{2}y - 9 \end{cases} \quad \text{(equações reduzidas na variável y)}$$

ou

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}z + 1 \\ y = -\frac{2}{3}z - 6 \end{cases} \quad \text{(equações reduzidas na variável z)}$$

d) A reta r das equações (7) pode ser representada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

Da primeira equação obtém-se $t = x - 2$ que, substituindo nas outras duas as transforma em

$y = -4 + 2(x - 2) = 2x - 8$
$z = -3 - 3(x - 2) = -3x + 3$

que são as equações reduzidas de (8).

e) Para encontrar um vetor diretor da reta

$$r: \begin{cases} y = 2x - 8 \\ z = -3x + 3 \end{cases}$$

uma das formas é determinar dois pontos A e B de r e, posteriormente, encontrar o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$. Por exemplo,

para $x = 0$, obtém-se o ponto $A(0, -8, 3)$ e
para $x = 1$, obtém-se o ponto $B(1, -6, 0)$.

Logo, $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -3)$ é um vetor diretor de r.

Outra maneira seria isolar a variável x nas duas equações, obtendo-se desse modo equações simétricas de r:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+8}{2} = \frac{z-3}{-3}$$

onde a leitura do vetor diretor $(1, 2, -3)$ é imediata.

Retas Paralelas aos Planos Coordenados

Uma reta é paralela a um dos planos xOy, xOz ou yOz se seus vetores diretores forem paralelos ao correspondente plano. Neste caso, *uma das componentes do vetor é nula.*

A Figura 5.4 mostra a reta r (r // xOy) que passa pelo ponto A(-1, 2, 4) e tem vetor diretor $\vec{v} = (2, 3, 0)$ (a 3ª componente é nula porque $\vec{v}$ // xOy).

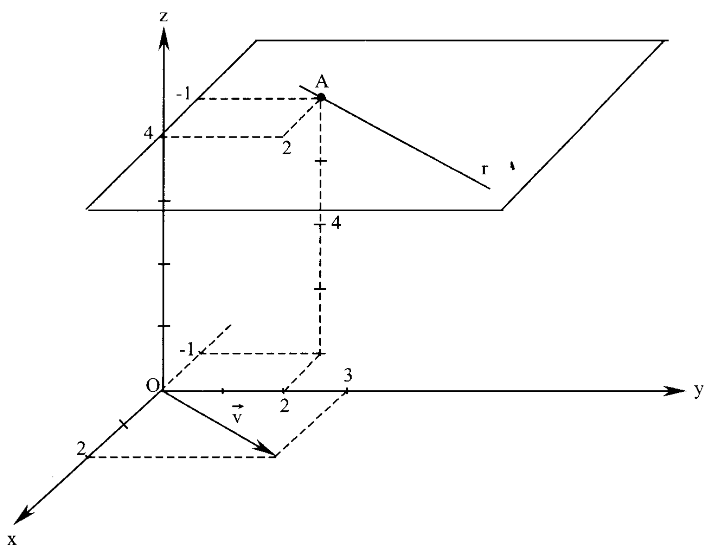


Figura 5.4

Um sistema de equações paramétricas de r é

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$$

Observação

Como todos os pontos de r são do tipo (x, y, 4), isto é, são pontos de cota 4, todos eles *distam 4 unidades do plano* xOy e por isso r // xOy. Por outro lado, sendo $P_1(x_1, y_1, 4)$ e $P_2(x_2, y_2, 4)$ pontos distintos de r, o vetor diretor $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ 0)$ sempre terá a 3ª componente nula.

Comentário idêntico faríamos para os casos de uma reta ser paralela aos outros dois planos.

A Figura 5.5 mostra a reta r que passa por A(1, 5, 3) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ e, portanto,

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

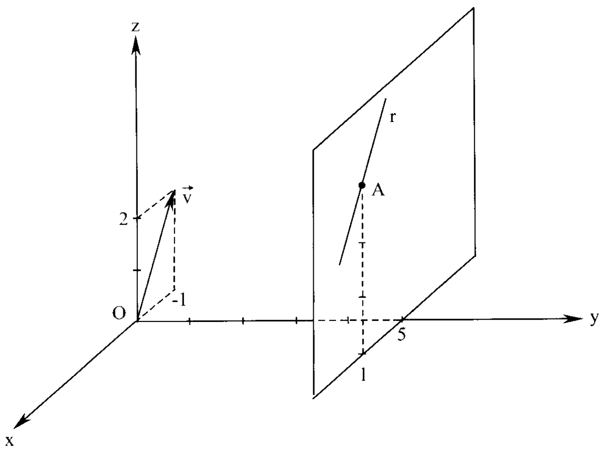


Figura 5.5

Retas Paralelas aos Eixos Coordenados

Uma reta é paralela a um dos eixos Ox, Oy ou Oz se seus vetores diretores forem paralelos a $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ou a $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ou a $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Neste caso, *duas das componentes do vetor são nulas*.

Exemplo

Seja a reta r que passa por A(2, 3, 4) e tem a direção do vetor $\vec{v} = (0, 0, 3)$. Como a direção de $\vec{v}$ é a mesma de $\vec{k}$, pois $\vec{v} = 3\vec{k}$, a reta r é paralela ao eixo Oz (Figura 5.6).

A reta r pode ser representada pelas equações

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

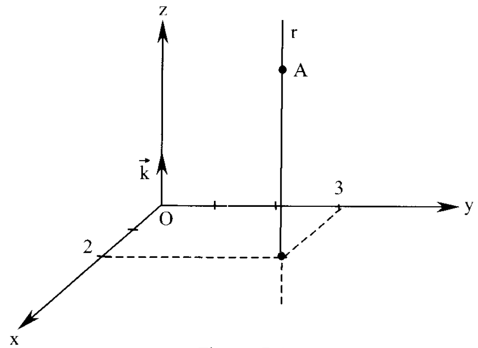


Figura 5.6

Para o caso particular da reta ser paralela a um eixo coordenado, costuma-se fazer uma simplificação, expressando as equações só pelas constantes. Para o caso particular acima, diz-se que as equações de r são

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

subentendendo-se z variável livre que assume todos os valores reais. Na verdade, todos os pontos de r são do tipo (2, 3, z) e as coordenadas constantes identificam perfeitamente a reta.

As Figuras 5.7 e 5.8 apresentam retas que passam por $A(x_1, y_1, z_1)$ e são paralelas aos eixos Oy e Ox, respectivamente. Logo, suas equações, já na forma simplificada, são

$$\begin{cases} x = x_1 \\ z = z_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}, \text{ respectivamente.}$$

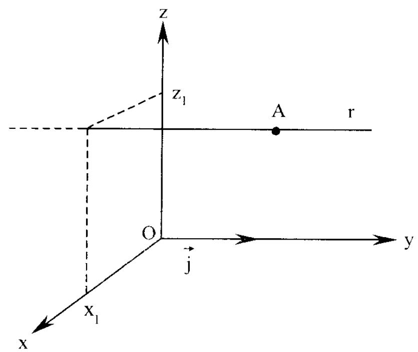


Figura 5.7

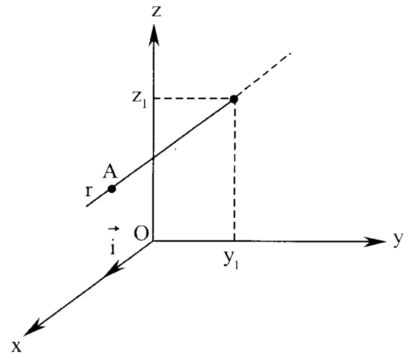


Figura 5.8

Observação

Os eixos Ox, Oy e Oz são retas particulares. Todas passam pela origem O(0, 0, 0) e têm a direção de $\vec{i}$, $\vec{j}$ ou $\vec{k}$, respectivamente. Logo suas equações são:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \text{nesta ordem.}$$

Ângulo de Duas Retas

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente (Figura 5.9).

Chama-se *ângulo de duas retas* r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2. Logo, sendo θ este ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad (9)$$

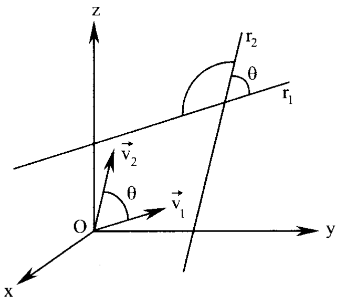


Figura 5.9

Exemplo

Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Solução

Os vetores que definem as direções das retas r_1 e r_2 são, respectivamente,

$\vec{v}_1 = (1, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$

Pela fórmula (9):

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|} = \frac{|(1, 1, -2) \cdot (-2, 1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}\ \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{|-2 + 1 - 2|}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\ \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\theta = \text{arc cos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$$

Retas Ortogonais

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

Então,

$$r_1 \perp r_2 \iff \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

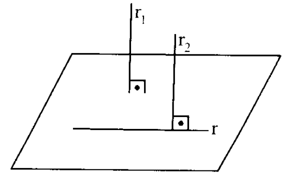


Figura 5.10

Observação

Duas retas ortogonais podem ser concorrentes ou não. Na Figura 5.10, as retas r_1 e r_2 são ortogonais a r. Porém, r_2 e r são concorrentes. Neste caso, diz-se que são *perpendiculares*.

Exemplo

As retas

$$r_1: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = 4x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{são ortogonais.}$$

Na verdade, sendo $\vec{v}_1 = (1, -2, 4)$ e $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$ vetores diretores de r_1 e r_2 e

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1(-2) - 2(1) + 4(1) = 0,$$

as retas r_1 e r_2 são ortogonais.

Reta Ortogonal a Duas Retas

Sejam as retas r_1 e r_2 não-paralelas, com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Toda reta r ao mesmo tempo ortogonal a r_1 e r_2 terá a direção de um vetor $\vec{v}$ tal que

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Em vez de tomarmos um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ como uma solução particular do sistema (10), poderíamos utilizar o produto vetorial (Capítulo 3), isto é,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

Definido um vetor diretor, a reta r estará determinada quando for conhecido um de seus pontos.

Exemplo

Determinar equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A(3, 4, -1) e é ortogonal às retas

$$r_1 : (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(2, 3, -4) \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 5 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Solução

As direções de r_1 e r_2 são definidas pelos vetores $\vec{v}_1 = (2, 3, -4)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$. Então a reta r tem a direção do vetor

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, 2)$$

Logo, tem-se

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Interseção de Duas Retas

Exemplos

Verificar se as retas r_1 e r_2 são concorrentes e, em caso afirmativo, determinar o ponto de interseção:

1) $$r_1 : \begin{cases} x = 3 + h \\ y = 1 + 2h \\ z = 2 - h \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

2) $$r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

3) $$r_1 : \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 2x - 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x + 2}{2} = \frac{y - 1}{-6} = \frac{z}{4}$$

Solução

Se existe um ponto I(x, y, z) comum às duas retas, suas coordenadas verificam todas as equações de r_1 e r_2, isto é, o ponto I é solução única do sistema formado pelas equações das duas retas.

1) Igualando as expressões em x, y e z nas equações de r_1 e r_2, tem-se

$$\begin{cases} 3 + h = 5 + 3t \\ 1 + 2h = -3 - 2t \\ 2 - h = 4 + t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} h - 3t = 2 \\ 2h + 2t = -4 \\ -h - t = 2 \end{cases}$$

sistema cuja solução é h = t = -1. Substituindo h = -1 nas equações de r, obtém-se

$$x = 3 + (-1) = 2 \qquad y = 1 + 2(-1) = -1 \qquad z = 2 - (-1) = 3$$

Portanto, o ponto de interseção é I(2, -1, 3).

O mesmo ponto seria obtido substituindo-se t = -1 nas equações de r_2.

2) Substituindo x, y e z das equações de r_2 nas equações de r_1, resulta o sistema

$$\begin{cases} 4 - t = -2t - 3 \\ 2 + 2t = t \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos t = -7 e da segunda t = -2. Como o sistema não tem solução, não existe ponto de interseção, isto é, as retas r_1 e r_2 não são concorrentes.

3) Observando que $\vec{v}_1 = (1, -3, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, -6, 4)$ são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente, e que $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, conclui-se que as retas são paralelas e não-coincidentes (basta ver que o ponto $A_1(0, 2, 1) \in r_1$ e $A_1 \notin r_2$). Fica a cargo do leitor buscar a solução do sistema constituído pelas equações de r_1 e r_2 para concluir da não-existência do ponto de interseção.

Observações

a) Se duas retas, como no exemplo (1), se interceptam, elas são *coplanares*, isto é, estão situadas no mesmo plano (Figura 5.11). Também são coplanares as retas paralelas do exemplo (3) (Figura 5.12).

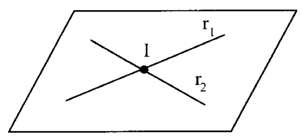


Figura 5.11

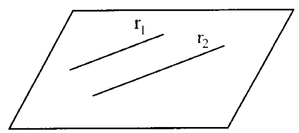


Figura 5.12

b) Se duas retas não são coplanares, elas são ditas *reversas*. É o caso do exemplo (2) (Figura 5.13), pois as retas além de não concorrentes são não-paralelas, e, portanto, não-coplanares.

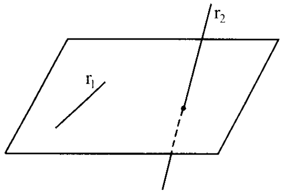


Figura 5.13

Problemas Propostos

1) Determinar uma equação vetorial da reta r definida pelos pontos A(2, -3, 4) e B(1, -1, 2) e verificar se os pontos $C(\frac{5}{2}, -4, 5)$ e D(-1, 3, 4) pertencem a r.

2) Dada a reta r : (x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(2, -3, 0), escrever equações paramétricas de r.

3) Escrever equações paramétricas da reta que passa por A(1, 2, 3) e é paralela à reta r : (x, y, z) = (1, 4, 3) + t(0, 0, 1).

4) Dada a reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$

, determinar o ponto de r tal que

a) a ordenada seja 6;
b) a abscissa seja igual à ordenada;
c) a cota seja o quádruplo da abscissa.

5) A reta r passa pelo ponto A(4,-3,-2) e é paralela à reta

$$s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Se $P(m, n, -5) \in r$, determinar m e n.

6) Determinar equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:

a) A(1, -1, 2) e B(2, 1, 0) b) A(3, 1, 4) e B(3, -2, 2)
c) A(1, 2, 3) e B(1, 3, 2) d) A(0, 0, 0) e B(0, 1, 0)

7) Com base na Figura 5.14, escrever equações paramétricas da reta por

a) A e B
b) C e D
c) A e D
d) B e C
e) D e E
f) B e D

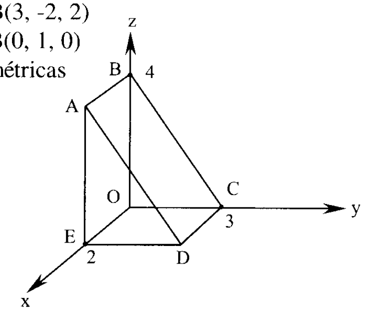


Figura 5.14

8) O ponto P(m, 1, n) pertence à reta que passa por A(3, -1, 4) e B(4, -3, -1). Determinar P.

9) Seja o triângulo de vértices A(-1, 4, -2), B(3, -3, 6) e C(2, -1, 4). Escrever equações paramétricas da reta que passa pelo ponto médio do lado AB e pelo vértice oposto C.

10) Os pontos $M_1(2, -1, 3)$, $M_2(1, -3, 0)$ e $M_3(2, 1, -5)$ são pontos médios dos lados de um triângulo ABC. Obter equações paramétricas da reta que contém o lado cujo ponto médio é M_1.

11) Os vértices de um triângulo são os pontos A(-1, 1, 3), B(2, 1, 4) e C(3, -1, -1). Obter equações paramétricas dos lados AB, AC e BC, e da reta r que contém a mediana relativa ao vértice B.

12) Verificar se os pontos $P_1(5, -5, 6)$ e $P_2(4, -1, 12)$ pertencem à reta

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

13) Determinar o ponto da reta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$ que possui

a) abscissa 5;
b) ordenada 2.

14) Obter o ponto de abscissa 1 da reta $r: \frac{2x+1}{3} = \frac{3y-2}{2} = z + 4$ e encontrar um vetor diretor de r que tenha ordenada 2.

15) Obter equações reduzidas na variável x, da reta

a) que passa por A(4, 0, -3) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 4, 5)$;
b) pelos pontos A(1, -2, 3) e B(3, -1, -1);
c) pelos pontos A(-1, 2, 3) e B(2, -1, 3);
d) dada por $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = 4t - 5 \end{cases}$

16) Escrever equações reduzidas na variável z da reta que passa por A(-1, 6, 3) e B(2, 2, 1).

17) Na reta $r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$, determinar o ponto de

a) ordenada igual a 9;
b) abscissa igual ao dobro da cota;
c) ordenada igual ao triplo da cota.

18) Representar graficamente as retas de equações

a) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x \\ z = 3 + x \end{cases}$ c) $x = y = z$ d) $\begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 4 \\ z = 2x \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = -3 \\ z = 3 \end{cases}$

19) Determinar equações paramétricas e representar graficamente a reta que passa por

a) A(3, -2, 4) e é paralela ao eixo dos x;

b) A(2, 2, 4) e é perpendicular ao plano xOz;

c) A(-2, 3, 4) e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos x e dos y;

d) A(4, -1, 3) e tem a direção de $3\vec{i} - 2\vec{j}$;

e) A(3, -1, 3) e B(3, 3, 4).

20) Escrever equações paramétricas das retas que passam pelo ponto A(4, -5, 3) e são, respectivamente, paralelas aos eixos Ox, Oy e Oz.

21) Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

a) $r_1: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $r_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+6}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

b) $r_1: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{cases}$ e $r_2: y = \dfrac{z+1}{-1};\ x = 4$

c) $r_1: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\,t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $r_1: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-2}{3} \end{cases}$

22) Determinar o valor de n para que seja de 30° o ângulo entre as retas

a) $r_1: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$ e $r_2: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$

b) $r_1: \begin{cases} y = nx - 1 \\ z = 2x \end{cases}$ e r_2: eixo Oy

23) Sabendo que as retas r_1 e r_2 são ortogonais, determinar o valor de m para os casos:

a) $r_1: \begin{cases} x = 2mt - 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 4 \end{cases}$

b) $r_1: \begin{cases} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$ e r_2: reta por A(1, 0, m) e B(-2, 2m, 2m)

24) Encontrar equações paramétricas da reta que passa por A e é simultaneamente ortogonal às retas r_1 e r_2, nos casos:

a) A(3, 2, -1) $r_1: \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$

b) A(0, 0, 0) $r_1: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ e $r_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 1 \\ z = 2 \end{cases}$

c) A é a interseção de r_1 e r_2

$r_1: x - 2 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$

25) Verificar se as retas são concorrentes e, em caso afirmativo, encontrar o ponto de interseção:

a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 5 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = -3x + 7 \\ z = x + 1 \end{cases}$

b) $r_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{4}$ e $r_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 3t \end{cases}$

c) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x - 10 \end{cases}$ e $r_2: x = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$

d) $r_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 5t \\ z = 6 - 6t \end{cases}$ -6 e $r_2: \begin{cases} x = -3 + 6h \\ y = 1 + 7h \\ z = -1 + 13h \end{cases}$

e) $r_1: (x, y, z) = (2, 4, 1) + t(1, -2, 3)$ e $r_2: (x, y, z) = (-1, 2, 5) + t(4, 3, -2)$

f) $r_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - t \\ z = -t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = 6 - x \\ z = 2 - x \end{cases}$

26) Calcular o valor de m para que sejam concorrentes as seguintes retas:

a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2: x - 5 = \dfrac{y}{m} = z + 1$

b) $r_1: \begin{cases} x = m - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ e $r_2: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-2}$

27) Dadas as retas

$$r_1: \frac{x-1}{2} = -y;\ z = 3 \qquad \text{e} \qquad r_2: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases},$$

encontrar equações reduzidas na variável x da reta que passa por A(0, 1, 0) e pelo ponto de interseção de r_1 com r_2.

28) Determinar na reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

um ponto eqüidistante dos pontos A(2,-1,-2) e B(1,0,-1).

29) Determinar os pontos da reta

r: $x = 2 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 3 + 2t$ que

a) distam 6 unidades do ponto A(2, 1, 3);

b) distam 2 unidades do ponto B(1, -1, 3).

30) Escrever equações reduzidas da reta que passa por A(1, 3, 5) e intercepta o eixo dos z perpendicularmente.

31) Escrever equações reduzidas na variável z, de cada uma das retas que satisfazem às condições dadas:

a) passa por A(4, -2, 2) e é paralela à reta r: $x = 2y = -2z$;

b) passa pela origem e é ortogonal a cada uma das retas

$$r: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = 2z - 2 \qquad \text{e} \qquad s: x = -y = -z.$$

32) Determinar o ângulo que a reta que passa por A(3, -1, 4) e B(1, 3, 2) forma com a sua projeção sobre o plano xy.

33) Apresentar equações paramétricas da projeção da reta

$$r: \begin{cases} y = 5x - 7 \\ z = -2x + 6 \end{cases} \quad \text{sobre o plano xy.}$$

34) Dados o ponto A(3, 4, -2) e a reta

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t, \end{cases}$$

a) determinar equações paramétricas da reta que passa por A e é perpendicular a r;

b) calcular a distância de A a r;

c) determinar o ponto simétrico de A em relação a r.

Respostas de Problemas Propostos

1) $(x, y, z) = (2, -3, 4) + t(-1, 2, -2)$, $C \in r$ e $D \notin r$.

2) $x = -1 + 2t \quad y = 2 - 3t \quad z = 3$

3) $x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3 + t$

4) a) (-1, 6, -10) b) $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -3)$ c) (-4, 9, -16)

5) m = 13, n = -15

6) a) $x = 1 + t \quad y = -1 + 2t \quad z = 2 - 2t$
   b) $x = 3 \quad y = 1 - 3t \quad z = 4 - 2t$
   c) $x = 1 \quad y = 2 + t \quad z = 3 - t$
   d) $x = 0 \quad y = t \quad z = 0$ (eixo Oy)

7) a) $x = 2 + 2t \quad y = 0 \quad z = 4$
   b) $x = 2t \quad y = 3 \quad z = 0$
   c) $x = 2 \quad y = 3t \quad z = 4 - 4t$
   d) $x = 0 \quad y = 3t \quad z = 4 - 4t$
   e) $x = 2 \quad y = 3 + 3t \quad z = 0$
   f) $x = 2t \quad y = 3t \quad z = 4 - 4t$

8) P(2, 1, 9)

9) $x = 2 + t \quad y = -1 - \frac{3}{2}t \quad z = 4 + 2t$

10) $x = 2 + t \quad y = -1 + 4t \quad z = 3 - 5t$

11) AB: $x = -1 + 3t \quad y = 1 \quad z = 3 + t$ com $t \in [0,1]$
    AC: $x = -1 + 4t \quad y = 1 - 2t \quad z = 3 - 4t$ com $t \in [0,1]$
    BC: $x = 2 + t \quad y = 1 - 2t \quad z = 4 - 5t$ com $t \in [0,1]$
    r: $x = 2 + t \quad y = 1 + t \quad z = 4 + 3t$

12) Apenas P_1

13) (5, -5, 8) e (-9, 2, -20)

14) $(1, \frac{4}{3}, -3)$ e $\vec{v} = (\frac{9}{2}, 2, 3)$

15) a) $y = 2x - 8$ e $z = \frac{5}{2}x - 13$ c) $y = -x + 1$ e $z = 3$
    b) $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$ e $z = -2x + 5$ d) $y = -3x + 6$ e $z = -4x + 3$

16) $x = -\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}$ e $y = 2z$

17) a) (3, 9, 2) b) (2, 7, 1) c) (6, 15, 5)

19) a) $\begin{cases} y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

20) $\begin{cases} y = -5 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$

21) a) 60º b) 30º c) 30º d) $\theta = \text{arc cos}(\frac{2}{3}) \cong 48°11'$

22) a) 7 ou 1 b) $\pm\sqrt{15}$

23) a) $m = -\frac{7}{4}$ b) 1 ou $-\frac{3}{2}$

24) a) $x = 3 + t$ $y = 2 - t$ $z = -1$
b) $x = 2t$ $y = 6t$ $z = -5t$
c) $x = 2 + t$ $y = -1 - 5t$ $z = 3t$

25) a) (2, 1, 3) b) (1, 2, -2) c) reversas d) (3, 8, 12)
e) reversas f) coincidentes

26) a) -3 b) 4

27) $\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = 3x \end{cases}$

28) $(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$

29) a) (4, 5, 7) e (0, -3, -1) b) $(\frac{17}{9}, \frac{7}{9}, \frac{25}{9})$ e (1, -1, 1)

30) $y = 3x$, $z = 5$

31) a) $\begin{cases} x = -2z + 8 \\ y = -z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5z \\ y = 4z \end{cases}$

32) $\theta = \text{arc cos}\,(\frac{\sqrt{30}}{6})$

33) $x = 1 + t$ $y = -2 + 5t$ $z = 0$

34) a) $\begin{cases} x = 3 - 2h \\ y = 4 \\ z = -2 + h \end{cases}$ b) $\sqrt{20}$ c) (-5, 4, 2)

MAKRON
Books

6

O Plano

Equação Geral do Plano

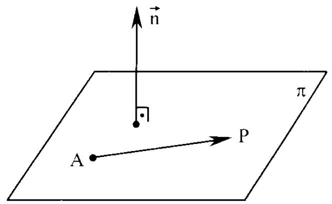


Figura 6.1

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vetor normal (ortogonal) ao plano (Figura 6.1).

Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor representado em π. Então, um ponto P(x, y, z) pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é,

$$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$$

ou

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

ou

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

ou, ainda

$$ax + by + cz - a x_1 - b y_1 - c z_1 = 0$$

Fazendo

$-a x_1 - b y_1 - c z_1 = d$, obtemos

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

Esta é a equação *geral* do plano π.