19) a) $\begin{cases} y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

20) $\begin{cases} y = -5 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$

21) a) 60° b) 30° c) 30° d) $\theta = \text{arc cos}(\frac{2}{3}) \cong 48°11'$

22) a) 7 ou 1 b) $\pm\sqrt{15}$

23) a) $m = -\frac{7}{4}$ b) 1 ou $-\frac{3}{2}$

24) a) $x = 3 + t$ $y = 2 - t$ $z = -1$
b) $x = 2t$ $y = 6t$ $z = -5t$
c) $x = 2 + t$ $y = -1 - 5t$ $z = 3t$

25) a) (2, 1, 3) b) (1, 2, -2) c) reversas d) (3, 8, 12)
e) reversas f) coincidentes

26) a) -3 b) 4

27) $\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = 3x \end{cases}$

28) $(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$

29) a) (4, 5, 7) e (0, -3, -1) b) $(\frac{17}{9}, \frac{7}{9}, \frac{25}{9})$ e (1, -1, 1)

30) $y = 3x$, $z = 5$

31) a) $\begin{cases} x = -2z + 8 \\ y = -z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5z \\ y = 4z \end{cases}$

32) $\theta = \text{arc cos}\ (\frac{\sqrt{30}}{6})$

33) $x = 1 + t$ $y = -2 + 5t$ $z = 0$

34) a) $\begin{cases} x = 3 - 2h \\ y = 4 \\ z = -2 + h \end{cases}$ b) $\sqrt{20}$ c) (-5, 4, 2)

MAKRON
Books

6

O Plano

Equação Geral do Plano

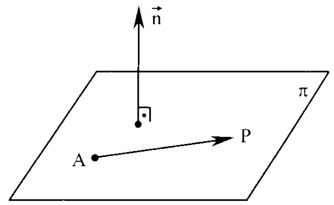

Figura 6.1

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vetor normal (ortogonal) ao plano (Figura 6.1).

Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor representado em π. Então, um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é,

$$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$$

ou

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

ou

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

ou, ainda

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

Fazendo

$-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, obtemos

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

Esta é a equação *geral* do plano π.

Observações

a) Assim como $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π, qualquer vetor $k\vec{n}$, $k \neq 0$, é também vetor normal ao plano.

b) É importante notar que os três coeficientes a, b e c da equação (1) representam as componentes de um vetor normal ao plano.

Por exemplo, se um plano π é dado por

$\pi : 3x + 2y - z + 1 = 0,$

um de seus vetores normais é $\vec{n} = (3, 2, -1)$.

c) Para obter pontos de um plano dado por uma equação geral, basta atribuir valores arbitrários a duas das variáveis e calcular o valor da outra na equação dada.

Assim, por exemplo, se na equação anterior fizermos $x = 4$ e $y = -2$, teremos:

$$3(4) + 2(-2) - z + 1 = 0$$
$$12 - 4 - z + 1 = 0$$
$$z = 9$$

e, portanto, o ponto A(4, -2, 9) pertence a este plano.

Exemplos

1) Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto A(2, -1, 3) e tem $\vec{n} = (3, 2, -4)$ como um vetor normal.

Solução

Como $\vec{n}$ é normal a π, sua equação é do tipo

$$3x + 2y - 4z + d = 0$$

e sendo A um ponto do plano, suas coordenadas devem verificar a equação, isto é,

$$3(2) + 2(-1) - 4(3) + d = 0$$
$$6 - 2 - 12 + d = 0$$
$$d = 8$$

Logo, uma equação geral do plano π é

$$3x + 2y - 4z + 8 = 0$$

Observação

Este exemplo, como outro qualquer que envolva determinação de equação do plano, pode ser resolvido de modo análogo à dedução da equação, pois um vetor normal ao plano é suficiente para caracterizar sua direção. Em nosso estudo utilizaremos sempre a equação geral em vez de sua dedução. O leitor poderá optar entre uma ou outra maneira.

2) Escrever uma equação geral do plano π que passa pelo ponto A(2, 1, 3) e é paralelo ao plano

$\pi_1 : 3x - 4y - 2z + 5 = 0.$

Solução

É imediato que

"*um vetor normal a um plano é também normal a qualquer plano paralelo a este*".

Então, como $\pi \parallel \pi_1$, o vetor $\vec{n}_1 = (3, -4, -2)$ normal a π_1 é também normal a π.

Logo, uma equação de π é da forma

$$3x - 4y - 2z + d = 0$$

Tendo em vista que $A \in \pi$, suas coordenadas devem verificar a equação:

$$3(2) - 4(1) - 2(3) + d = 0$$

e

$d = 4$; portanto, uma equação de π é

$$3x - 4y - 2z + 4 = 0$$

3) A reta

$$r: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

é ortogonal ao plano π que passa pelo ponto A(2, 1, -2). Determinar uma equação geral de π e representá-lo graficamente.

Solução

Como $r \perp \pi$, qualquer vetor diretor de r é um vetor normal ao plano. Sendo $\vec{n} = (3, 2, 1)$ um destes vetores, uma equação de π é da forma

$$3x + 2y + z + d = 0$$

Como $A \in \pi$, deve-se ter

$$3(2) + 2(1) + (-2) + d = 0$$

e $d = -6$; portanto, uma equação de π é

$$3x + 2y + z - 6 = 0$$

Para a representação gráfica do plano, obteremos três de seus pontos. Se nesta equação fizermos

$y = 0$ e $z = 0$, vem $x = 2$
$x = 0$ e $z = 0$, vem $y = 3$
$x = 0$ e $y = 0$, vem $z = 6$

Obtemos, assim, os pontos $A_1(2, 0, 0)$, $A_2(0, 3, 0)$ e $A_3(0, 0, 6)$ nos quais o plano intercepta os eixos coordenados. A Figura 6.2 mostra o referido plano.

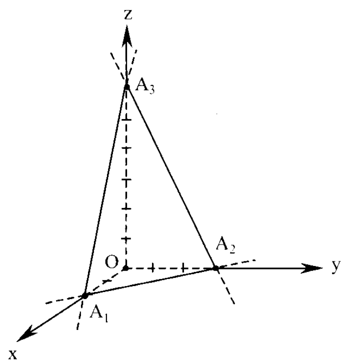

Figura 6.2

Observação

Se um plano π intercepta os eixos coordenados nos pontos (p, 0, 0), (0, q, 0) e (0, 0, r) com $p \cdot q \cdot r \neq 0$, então π admite a equação

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

denominada *equação segmentária* do plano π.

Para o caso do problema anterior, onde estes pontos são $A_1(2, 0, 0)$, $A_2(0, 3, 0)$ e $A_3(0, 0, 6)$, a equação segmentária do plano é

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \qquad (2)$$

que é equivalente à equação $3x + 2y + z - 6 = 0$, ao eliminarmos os denominadores e ordenarmos os termos.

Reciprocamente, se escrevermos esta última equação como $3x + 2y + z = 6$ e dividirmos ambos os membros por 6, voltaremos a ter a equação segmentária (2).

Equação Vetorial e Equações Paramétricas do Plano

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π (Figura 6.3), porém, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-paralelos.

Para todo ponto P do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Um ponto P(x, y, z) pertence a π se, e somente se, existem números reais h e t tais que

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou, em coordenadas

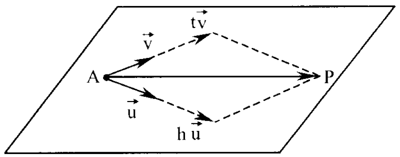

Figura 6.3

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2), \; h, t \in \mathbf{R} \qquad (3)$$

Esta equação é denominada *equação vetorial* do plano π. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *vetores diretores* de π.

Da equação (3) obtém-se

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1h + a_2t,\; y_0 + b_1h + b_2t,\; z_0 + c_1h + c_2t)$$

que, pela condição de igualdade, vem

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1h + a_2t \\ y = y_0 + b_1h + b_2t \\ z = z_0 + c_1h + c_2t, \; h, t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Estas equações são chamadas *equações paramétricas* de π e h e t são variáveis auxiliares denominadas parâmetros.

Exemplos

1) Seja o plano π que passa pelo ponto A(2, 2, -1) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Solução

a) *Equação vetorial*: $(x, y, z) = (2, 2, -1) + h(2, -3, 1) + t(-1, 5, -3)$

b) *Equações paramétricas:*

$$\begin{cases} x = 2 + 2h - t \\ y = 2 - 3h + 5t \\ z = -1 + h - 3t \end{cases}$$

Observação

Se quisermos algum ponto deste plano, basta atribuir valores reais para h e t.

Por exemplo, para h = 0 e t = 1, vem

$x = 1$, $\quad y = 7 \quad$ e $\quad z = -4$

e, portanto, B(1, 7, -4) é um ponto do plano π.

c) *Equação geral:*

Como o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (4, 5, 7)$$

é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ele é um vetor $\vec{n}$ normal ao plano π (Figura 6.4).

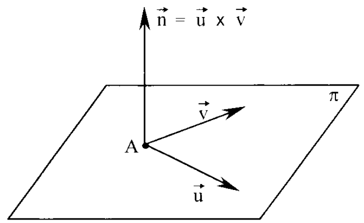

Figura 6.4

Então, uma equação geral de π é da forma

$$4x + 5y + 7z + d = 0$$

e, como $A \in \pi$ tem-se

$$4(2) + 5(2) + 7(-1) + d = 0$$

e $d = -11$; portanto,

$$4x + 5y + 7z - 11 = 0$$

é uma equação geral de π.

Observação

Existe uma outra maneira de se obter uma equação geral de π: como $P(x, y, z)$ representa um ponto qualquer do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares (Figura 6.5) e, portanto, o produto misto deles é nulo, isto é,

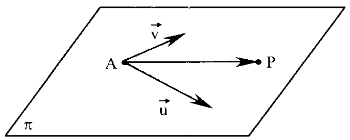

Figura 6.5

$$(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Assim, obtém-se uma equação geral do plano desenvolvendo o 1° membro da igualdade

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

que é equivalente à equação $4x + 5y + 7z - 11 = 0$

2) Dado o plano π determinado pelos pontos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, -3)$ e $C(-1, -2, 6)$, obter um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Solução

a) *Equações paramétricas:*

Sabe-se que existe apenas um plano que contém três pontos não em linha reta. Os vetores não-paralelos

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -5) \qquad \text{e} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 4)$$

são vetores diretores de π (Figura 6.6) e, portanto, as equações (utilizando o ponto A)

$$\begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = -1 + 2h - t \\ z = 2 - 5h + 4t \end{cases}$$

são equações paramétricas do plano.

b) *Equação geral:*

Como no problema anterior, sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de π, o vetor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (3, 6, 3)$$

é um vetor normal a π (Figura 6.6).

Então, uma equação geral é da forma

$$3x + 6y + 3z + d = 0.$$

Como $A \in \pi$ (poderíamos tomar B ou C):

$$3(1) + 6(-1) + 3(2) + d = 0$$

e $d = -3$; portanto, uma equação geral de π é

$$3x + 6y + 3z - 3 = 0.$$

ou, multiplicando ambos os membros da equação por $\frac{1}{3}$:

$$x + 2y + z - 1 = 0.$$

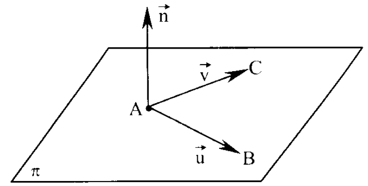

Figura 6.6

3) Dado o plano π de equação $2x - y - z + 4 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

Solução

Basta tomarmos três pontos A, B e C não alinhados de π e proceder como no problema anterior.

Fazendo

$x = y = 0$ vem, $z = 4$ $\therefore$ $A(0, 0, 4) \in \pi$

$x = 1$ e $y = 0$ vem, $z = 6$ $\therefore$ $B(1, 0, 6) \in \pi$

$x = 0$ e $y = 1$ vem, $z = 3$ $\therefore$ $C(0, 1, 3) \in \pi$

Como $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$ são vetores diretores de π, as equações

$$\begin{cases} x = 0 + 1.h + 0.t \\ y = 0 + 0.h + 1.t \\ z = 4 + 2.h - 1.t \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} x = h \\ y = t \\ z = 4 + 2h - t \end{cases}$$

são equações paramétricas de π.

Observações

a) Como é possível encontrar infinitos ternos A, B e C de pontos não alinhados em π, existem infinitos sistemas de equações paramétricas que representam o *mesmo* plano.

b) É importante observar que os vetores diretores sejam não-paralelos. Se ocorrer $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$, basta trocar um dos pontos de modo a garantir que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ sejam não-paralelos.

c) Uma outra maneira de obter equações paramétricas a partir da equação geral, é substituindo duas das variáveis pelos parâmetros h e t e, posteriormente, isolar a terceira variável em função destes. Por exemplo, se na equação geral $2x - y - z + 4 = 0$, fizermos $y = h$ e $z = t$, teremos $2x - h - t + 4 = 0$. Isolando x resulta, $x = -2 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}t$.

Então,

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}t \\ y = h \\ z = t \end{cases}$$

são equações paramétricas do plano.

De modo análogo obteríamos outros sistemas:

$$\begin{cases} x = h \\ y = t \\ z = 4 + 2h - t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = h \\ y = 4 + 2h - t \\ z = t \end{cases}$$

4) Determinar uma equação geral do plano π que contenha as retas

$$r_1: \begin{cases} y = x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 3 \\ z = -6t + 1 \end{cases}$$

Solução

Observemos que as direções das retas são dadas pelos vetores $\vec{v}_1 = (1, 1, -3)$ e $\vec{v}_2 = (2, 2, -6)$. Como $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, as retas r_1 e r_2 são paralelas e os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ *não* são vetores diretores do plano procurado. Tendo em vista que os pontos $A_1(0, 1, -2) \in r_1$ e $A_2(0, 3, 1) \in r_2$ também pertencem a π, o vetor $\overrightarrow{A_1A_2} = (0, 2, 3)$ está representado neste plano. Então, $\vec{v}_1$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ (ou $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$) são vetores diretores de π e um de seus vetores normais (Figura 6.7) será

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (9, -3, 2)$$

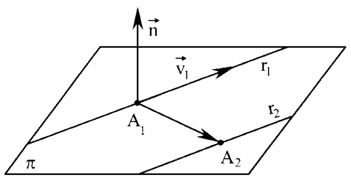

Figura 6.7

Portanto, uma equação geral de π é da forma

$$9x - 3y + 2z + d = 0$$

e, como $A_1 \in \pi$, tem-se

$$9(0) - 3(1) + 2(-2) + d = 0$$

e $d = 7$

Logo,

$$\pi: 9x - 3y + 2z + 7 = 0.$$

Equação Vetorial de um Paralelogramo

Dados os pontos A, B e C não em linha reta, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinam o paralelogramo (Figura 6.8) cuja equação vetorial é

$$P = A + h(\overrightarrow{AB}) + t(\overrightarrow{AC})$$

ou

$$P = A + h(B - A) + t(C - A) \qquad \text{com } h, t \in [0, 1]$$

onde P representa um ponto qualquer deste paralelogramo.

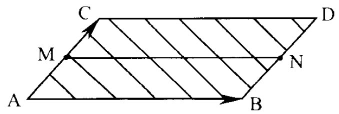

Figura 6.8

Observemos que

para $h = t = 0$, obtém-se o ponto A (P = A);

para $h = 1$ e $t = 0$, obtém-se o ponto B (P = B);

para $h = 0$ e $t = 1$, obtém-se o ponto C (P = C);

para $h = t = 1$, obtém-se o ponto D (P = D);

para $t = \frac{1}{2}$ e $h \in [0, 1]$, obtém-se o segmento MN onde M e N são os pontos médios de AC e BD, respectivamente, e assim por diante;

para h e t entre 0 e 1, obtém-se todos os pontos do paralelogramo.

Casos Particulares da Equação Geral do Plano

No caso de um ou mais coeficientes da equação geral do plano $ax + by + cz + d = 0$ serem nulos, o plano ocupará uma posição particular em relação aos eixos ou planos coordenados.

Faremos uma análise dos diversos casos a partir de uma equação completa $ax + by + cz + d = 0$.

Por exemplo

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0 \qquad (4)$$

onde $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$ e $d = -12$. O plano que esta equação representa intercepta os três eixos coordenados em (4, 0, 0), (0, 3, 0) e (0, 0, 6) (Figura 6.9).

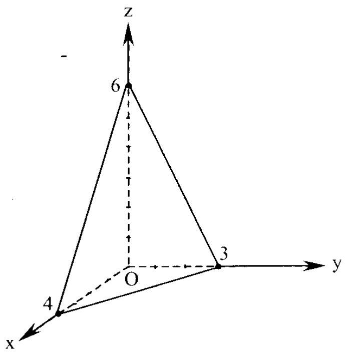

Figura 6.9

1º) Se tivéssemos $d = 0$, a equação (4) seria

$$3x + 4y + 2z = 0$$

e representa um plano paralelo ao da Figura 6.9, porém, passando pela origem O(0, 0, 0), pois as coordenadas deste ponto verificam a equação:

$$3(0) + 4(0) + 2(0) = 0$$

2º) Se tivéssemos $a = 0$, a equação (4) seria

$$4y + 2z - 12 = 0 \quad \text{(ou: } 0x + 4y + 2z - 12 = 0\text{)}, \qquad (5)$$

e representa um plano paralelo ao eixo dos x, interceptando os outros dois eixos ainda em (0, 3, 0) e (0, 0, 6) (Figura 6.10).

Observemos ainda que nenhum ponto do tipo (x, 0, 0) satisfaz a equação (5) pois

$0(x) + 4(0) + 2(0) - 12 = 0$ é falso.

Ora, se nenhum ponto do eixo dos x verifica a equação (5), significa que o plano não tem ponto em comum com este eixo e, portanto, só pode ser paralelo a ele.

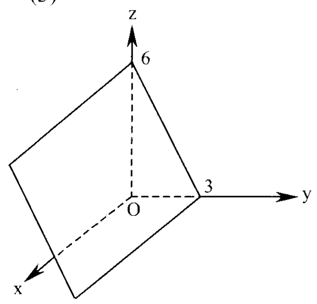

Figura 6.10

Desta análise ainda se conclui que o plano é paralelo ao eixo da variável ausente na equação.

Se em (5) tivéssemos ainda $d = 0$, a equação resultante

$4y + 2z = 0$

representa um plano pela origem, e, portanto, contém o eixo Ox (Figura 6.11).

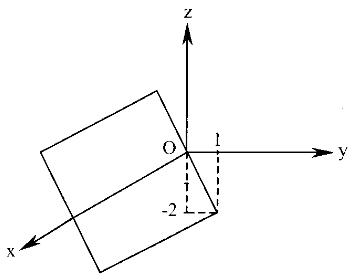

Figura 6.11

Comentários idênticos faríamos para os casos $b = 0$ ou $c = 0$, quando a equação (4) seria

$3x + 2z - 12 = 0$ (Figura 6.12)

ou

$3x + 4y - 12 = 0$ (Figura 6.13).

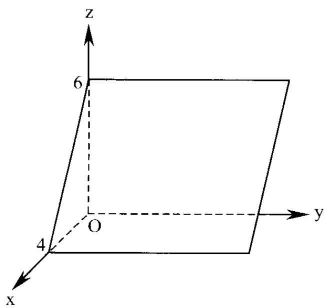

Figura 6.12

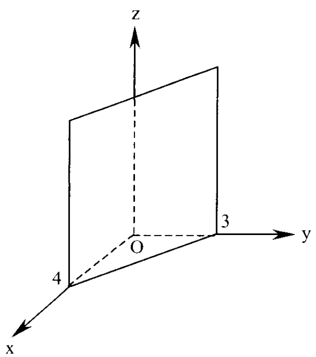

Figura 6.13

3º) Se tivéssemos $a = b = 0$, a equação (4) seria

$$2z - 12 = 0 \quad \text{(ou: } 0x + 0y + 2z - 12 = 0\text{)} \qquad (6)$$

ou, simplesmente,

$z = 6$

Observemos que todos os pontos do tipo (x, y, 6) verificam a equação (6). Ora, se todos os pontos deste plano têm cota 6, significa que todos estão 6 unidades afastados do plano xOy. Portanto, trata-se de um plano paralelo a xOy e que intercepta o eixo Oz perpendicularmente em (0, 0, 6).

Assim, concluímos que toda equação de forma

$z = k$

representa um plano paralelo ao plano xOy e intercepta o eixo Oz em (0, 0, k).

Na Figura 6.14 estão representados os planos de equação $z = 6$ e $z = 0$ (plano xOy).

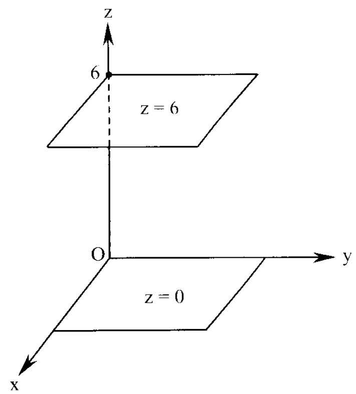

Figura 6.14

Raciocínio análogo, leva-nos a concluir que

$y = k$ representa um plano paralelo a xOz e

$x = k$ representa um plano paralelo a yOz.

Na Figura 6.15 estão representados os planos de equação $y = 3$ e $y = 0$ (plano xOz) e na Figura 6.16 os planos de equação $x = 4$ e $x = 0$ (plano yOz).

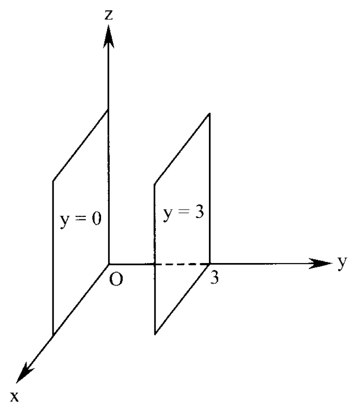

Figura 6.15

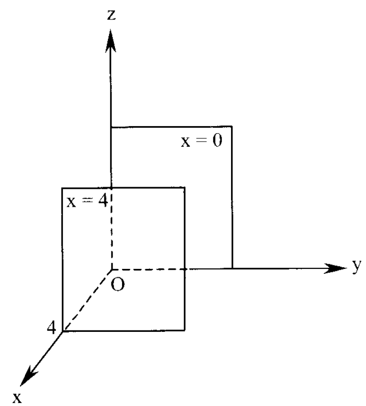

Figura 6.16

Ângulo de Dois Planos

Sejam os planos π_1 e π_2 com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, respectivamente (Figura 6.17).

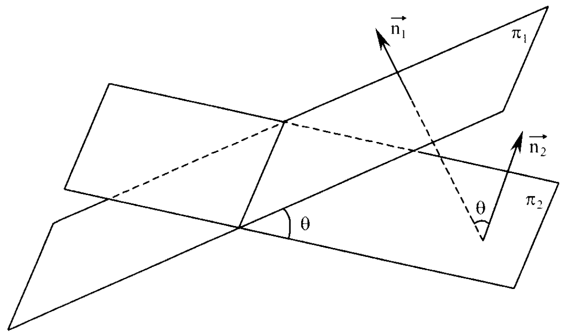

Figura 6.17

Chama-se *ângulo de dois planos* π_1 e π_2 o menor ângulo que um vetor normal a π_1 forma com um vetor normal a π_2. Sendo θ este ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \quad \text{com } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \qquad (7)$$

Como $\cos\theta \ge 0$ quando $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, o numerador de (7) deve ser positivo, razão pela qual tomou-se o produto escalar em módulo, pois que este poderá ser negativo quando o ângulo entre os vetores for o suplementar de θ.

Exemplo

Determinar o ângulo entre os planos

π_1: $2x + y - z + 3 = 0$ e π_2: $x + y - 4 = 0$.

Solução

Sendo $\vec{n}_1 = (2, 1, -1)$ e $\vec{n}_2 = (1, 1, 0)$ vetores normais a π_1 e π_2, de acordo com (7) tem-se

$$\cos\theta = \frac{|(2, 1, -1) \cdot (1, 1, 0)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 1 + 0|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo,

$$\theta = \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Planos Perpendiculares

Consideremos dois planos π_1 e π_2, e sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente. Pela Figura 6.18 conclui-se imediatamente:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

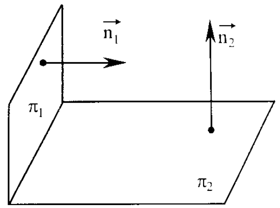

Figura 6.18

Exemplo

Verificar se π_1 e π_2 são planos perpendiculares:

a) π_1: $3x + y - 4z + 2 = 0$ e π_2: $2x + 6y + 3z = 0$

b) π_1: $x + y - 4 = 0$ e π_2: $\begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = h + t \\ z = t \end{cases}$

Solução

a) Sendo $\vec{n}_1 = (3, 1, -4)$ e $\vec{n}_2 = (2, 6, 3)$ vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente, e como

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3(2) + 1(6) - 4(3) = 0$$

conclui-se que π_1 e π_2 são perpendiculares.

b) O vetor $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ é um vetor normal a π_1. Teremos que encontrar um vetor $\vec{n}_2$ normal a π_2. Como $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 1, 1)$ são vetores diretores de π_2, podemos considerar

$$\vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -3)$$

Tendo em vista que

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1, 1, 0) \cdot (1, 1, -3) = 1(1) + 1(1) + 0(-3) = 2 \neq 0$

os planos π_1 e π_2 não são perpendiculares.

Paralelismo e Perpendicularismo entre Reta e Plano

Sejam uma reta r com a direção do vetor $\vec{v}$ e um plano π, sendo $\vec{n}$ um vetor normal a π. Pelas figuras conclui-se imediatamente:

I) $r \,//\, \pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ (Figura 6.19 (a))

II) $r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v} \,//\, \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha \vec{n}$ (Figura 6.19 (b))

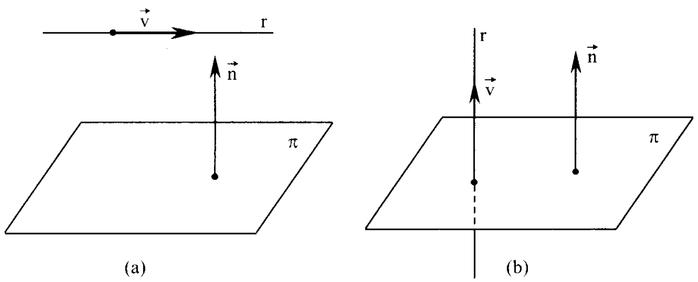

Figura 6.19

Exemplo

A reta $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$ é paralela ao plano $\pi : 5x + 2y - 4z - 1 = 0$

pois o vetor diretor $\vec{v} = (2, -3, 1)$ de r é ortogonal ao vetor normal $\vec{n} = (5, 2, -4)$ de π, isto é,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (2, -3, 1) \cdot (5, 2, -4) = 2(5) - 3(2) + 1(-4) = 0$$

Esta mesma reta, por sua vez, é perpendicular ao plano π_1: $4x - 6y + 2z - 5 = 0$, pois o vetor diretor $\vec{v} = (2, -3, 1)$ de r é paralelo ao vetor normal $\vec{n}_1 = (4, -6, 2)$ de π_1, isto é,

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{n}_1$$

ou de modo equivalente,

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

Reta Contida em Plano

Uma reta r está contida em um plano π (Figura 6.20) se

I) dois pontos A e B de r forem também de π

ou

II) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, onde $\vec{v}$ é um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π

e

$A \in \pi$, sendo $A \in r$.

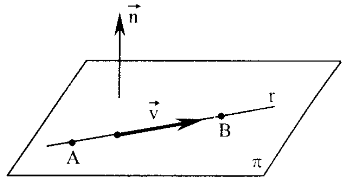

Figura 6.20

Exemplo

Determinar os valores de m e n para que a reta

$r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -2 - t \end{cases}$ esteja contida no plano π: $2x + my + nz - 5 = 0$.

Solução

Utilizando o primeiro critério exposto acima, sejam A(3, -1, -2) e B(4, -2, -3) os pontos de r. Como $r \subset \pi$, as coordenadas de A e B devem satisfazer a equação de π, isto é,

$$\begin{cases} 2(3) + m(-1) + n(-2) - 5 = 0 \\ 2(4) + m(-2) + n(-3) - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -m - 2n + 1 = 0 \\ -2m - 3n + 3 = 0 \end{cases}$$

donde m = 3 e n = -1.

Interseção de Dois Planos

Sejam os planos não-paralelos

π_1: $5x - y + z - 5 = 0$ e π_2: $x + y + 2z - 7 = 0$

A interseção de dois planos não-paralelos é uma reta r cujas equações se deseja determinar. Para tanto, dentre os vários procedimentos, apresentaremos dois.

1) Como r está contida nos dois planos, as coordenadas de qualquer ponto $(x,y,z) \in r$ devem satisfazer simultaneamente as equações dos dois planos. Logo, os pontos de r constituem a solução do sistema:

$$r: \begin{cases} 5x - y + z - 5 = 0 \\ x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

O sistema tem infinitas soluções (são os infinitos pontos de r) e, em termos de x, sua solução é

$$r: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = -2x + 4 \end{cases}$$

que são equações reduzidas de r.

2) Outra maneira de obter equações de r é determinar um de seus pontos e um vetor diretor. Seja determinar o ponto $A \in r$ que tem abscissa zero. Então, fazendo $x = 0$ nas equações do sistema (8), resulta o sistema

$$\begin{cases} -y + z - 5 = 0 \\ y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $y = -1$ e $z = 4$. Logo, A(0,-1,4).

Como um vetor diretor $\vec{v}$ de r é simultaneamente ortogonal a $\vec{n}_1 = (5, -1, 1)$ e $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$, normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente, (Figura 6.21), o vetor $\vec{v}$ pode ser dado por

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -9, 6)$$

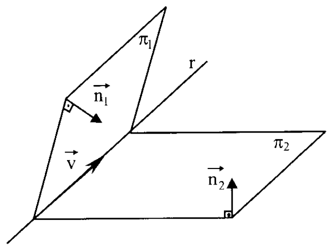

Figura 6.21

ou também $-\frac{1}{3}(-3, -9, 6) = (1, 3, -2)$

Escrevendo equações paramétricas de r, temos

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

Interseção de Reta com Plano

Exemplos

1) Determinar o ponto de interseção da reta r com o plano π, onde

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: 2x - y + 3z - 4 = 0$$

Solução

Qualquer ponto de r é da forma $(x, y, z) = (-1 + 2t, 5 + 3t, 3 - t)$. Se um deles é comum ao plano π, suas coordenadas verificam a equação de π:

$$2(-1 + 2t) - (5 + 3t) + 3(3 - t) - 4 = 0$$

e daí resulta $t = -1$.

Substituindo este valor nas equações de r obtém-se

$x = -1 + 2(-1) = -3 \qquad y = 5 + 3(-1) = 2 \qquad z = 3 - (-1) = 4$

Logo, a interseção de r e π é o ponto (-3, 2, 4).

2) Determinar a interseção da reta

$$r: \begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{com o plano } \pi: x + 3y + z - 2 = 0$$

Solução

Se existir um ponto $I(x, y, z) \in r$ que também pertence a π, suas coordenadas devem verificar as equações dos três planos dados. Logo, I será a solução do sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se: $x = 2$, $y = -1$ e $z = 3$. Logo, I(2, -1, 3) é a interseção de r e π, ou seja, é a interseção dos três planos.

Problemas Propostos

Os problemas de 1 a 48 estão de acordo com a ordem do texto e os demais se constituem em ótimo reforço.

1) Seja o plano

$\pi: 3x + y - z - 4 = 0$

Calcular:

a) O ponto de π que tem abscissa 1 e ordenada 3;
b) O ponto de π que tem abscissa 0 e cota 2;
c) O valor de k para que o ponto P(k, 2, k - 1) pertença a π;
d) O ponto de abscissa 2 e cuja ordenada é o dobro da cota;
e) O valor de k para que o plano π_1: $kx - 4y + 4z - 7 = 0$ seja paralelo a π.

Nos problemas de 2 a 4, determinar uma equação geral do plano

2) paralelo ao plano π: $2x - 3y - z + 5 = 0$ e que contenha o ponto A(4,-2,1);

3) perpendicular à reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{e que contenha o ponto } A(-1, 2, 3);$$

4) que passa pelo ponto médio do segmento de extremos A(5,-1,4) e B(-1,-7,1) e seja perpendicular a ele.

5) Dada a equação geral do plano π: $3x - 2y - z - 6 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

6) Sendo

$$\begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2h - 2t \end{cases}$$

equações paramétricas de um plano π, obter uma equação geral.

Nos problemas de 7 a 11, escrever uma equação geral e um sistema de equações paramétricas do plano determinado pelos pontos:

7) A(1, 0, 2), B(-1, 2, -1) e C(1, 1, -1).
8) A(0, 0, 0), B(1, 1, 5) e C(-1, 1, 1).
9) A(2, 0, -1), B(-2, 6, 3) e C(0, 3, 4).
10) A(2, 1, 0), B(-4, -2, -1) e C(0, 0, 1).
11) A(2, 1, 3), B(-3, -1, 3) e C(4, 2, 3).
12) Determinar o valor de α para que os pontos A(α, 1, 9), B(2, 3, 4), C(-4, -1, 6) e D(0, 2, 4) sejam coplanares.

Nos problemas de 13 a 18, determinar uma equação geral do plano nos seguintes casos:

13) O plano passa por A(2, 0, -2) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
14) O plano passa pelos pontos A(-3, 1, -2) e B(-1, 2, 1) e é paralelo à reta

$$r: \frac{x}{2} = \frac{z}{-3};\ y = 4.$$

15) O plano contém os pontos A(1, -2, 2) e B(-3, 1, -2) e é perpendicular ao plano $\pi_1: 2x + y - z + 8 = 0$.
16) O plano contém os pontos A(2, 1, 2) e B(1, -1, 4) e é perpendicular ao plano xOy.
17) O plano contém a reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

e é perpendicular ao plano $\pi_1: 2x + 2y - 3z = 0$
18) O plano contém o ponto A(4, 1, 1) e é perpendicular aos planos $\pi_1: 2x + y - 3z = 0$ e $\pi_2: x + y - 2z - 3 = 0$.

Nos problemas de 19 a 22, os pares de retas r_1 e r_2 são paralelas ou concorrentes. Encontrar uma equação geral do plano que as contém.

19) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{z-1}{-1} \\ y = -1 \end{cases}$

20) $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

21) $r_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$

22) $r_1: \begin{cases} x = z \\ y = -3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$

Nos problemas 23 e 24, determinar uma equação geral do plano que contenha o ponto e a reta dados:

23) A(4, 3, 2) e $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

24) A(1, -1, 2) e o eixo dos z

Nos problemas de 25 a 30, obter uma equação geral do plano

25) paralelo ao eixo dos z e que contenha os pontos A(0, 3, 4) e B(2, 0, -2);
26) paralelo ao eixo dos x e que contenha os pontos A(-2, 0, 2) e B(0, -2, 1);
27) paralelo ao eixo dos y e que contenha os pontos A(2, 3, 0) e B(0, 4, 1);
28) paralelo ao plano xOy e que contenha o ponto A(5, -2, 3);
29) perpendicular ao eixo dos y e que contenha o ponto A(3, 4, -1);
30) que contenha o ponto A(1, -2, 1) e o eixo dos x.
31) Representar graficamente os planos de equações:

a) $3x + 4y + 2z - 12 = 0$ e) $3y + 4z + 12 = 0$
b) $6x + 4y - 3z - 12 = 0$ f) $2z - 5 = 0$
c) $x + y - 3 = 0$ g) $y + 4 = 0$
d) $2x + 3y - 6 = 0$ h) $2x - y = 0$

32) Determinar o ângulo entre os seguintes planos

a) $\pi_1: x - 2y + z - 6 = 0$ e $\pi_2: 2x - y - z + 3 = 0$
b) $\pi_1: x - y + 4 = 0$ e $\pi_2: 2x - y - z = 0$
c) $\pi_1: x + 2y - 6 = 0$ e $\pi_2: y = 0$
d) $\pi_1: \begin{cases} x = 1 + h - t \\ y = h + 2t \\ z = h \end{cases}$ e $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2h \\ z = h + t \end{cases}$

33) Determinar o valor de m para que seja de 30° o ângulo entre os planos $\pi_1: x + my + 2z - 7 = 0$ e $\pi_2: 4x + 5y + 3z + 2 = 0$
34) Determinar m de modo que os planos π_1 e π_2 sejam perpendiculares:

a) $\pi_1: mx + y - 3z - 1 = 0$ e $\pi_2: 2x - 3my + 4z + 1 = 0$

b) $\pi_1: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = 2h + 3 \\ z = t - 2h + 1 \end{cases}$ e $\pi_2: 2mx + 4y - z - 1 = 0$

35) Dados a reta r e o plano π, determinar o valor de m para que se tenha I) $r // \pi$ e II) $r \perp \pi$, nos casos:

a) $r: x = -3 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 4t$ e $\pi: mx - y - 2z - 3 = 0$

b) $r: (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(2, m, -1)$ e $\pi: 3x + 2y + mz = 0$

36) Verificar se a reta r está contida no plano π:

a) $r: \begin{cases} y = 4x + 1 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ e $\pi: 2x + y - 3z - 4 = 0$

b) $r: x - 2 = \dfrac{y + 2}{2} = z + 3$ e $\pi: \begin{cases} x = h + t \\ y = -1 + 2h - 3t \\ z = -3 + h - t \end{cases}$

Nos problemas de 37 a 39, calcular os valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π:

37) $r: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$ e $\pi: mx + 2y - 3z + n = 0$

38) $r: \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -x + m \end{cases}$ e $\pi: 5x - ny + z + 2 = 0$

39) $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + mt \\ z = n - 4t \end{cases}$ e $\pi: 3x - 3y + z - 7 = 0$

Nos problemas de 40 a 42, estabelecer equações reduzidas na variável x da reta interseção dos planos:

40) $\pi_1: 3x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2: x + 2y - 3z - 4 = 0$

41) $\pi_1: 3x - 2y - z - 1 = 0$ e $\pi_2: x + 2y - z - 7 = 0$

42) $\pi_1: x + y - z + 2 = 0$ e $\pi_2: x + y + 2z - 1 = 0$

Nos problemas 43 e 44, encontrar equações paramétricas da reta interseção dos planos:

43) $\pi_1: 3x + y - 3z - 5 = 0$ e $\pi_2: x - y - z - 3 = 0$

44) $\pi_1: 2x + y - 4 = 0$ e $\pi_2: z = 5$

Nos problemas de 45 a 47, determinar o ponto de interseção da reta r com o plano π:

45) $r: x = 3t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = -t$ e $\pi: 2x + 3y - 2z - 7 = 0$

46) $r: \begin{cases} y = x - 10 \\ z = -x + 1 \end{cases}$ e $\pi: 2x - y + 3z - 9 = 0$

47) $r: \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 - 3k \end{cases}$ e $\pi: \begin{cases} x = 2 + h + 2t \\ y = -3 - h - t \\ z = 1 + 3h - 3t \end{cases}$

48) Sejam a reta r e o plano π dados por

$r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $\pi: 2x + 4y - z - 4 = 0$. Determinar:

a) o ponto de interseção de r com o plano xOz;
b) o ponto de interseção de r com π;
c) equações da reta interseção de π com o plano xOy.

49) Dado o ponto P(5, 2, 3) e o plano $\pi: 2x + y + z - 3 = 0$, determinar

a) equações paramétricas da reta que passa por P e é perpendicular a π;
b) a projeção ortogonal de P sobre o plano π;
c) o ponto P' simétrico de P em relação a π;
d) a distância de P ao plano π.

50) Determinar equações reduzidas na variável x, da reta que passa pelo ponto A(3, -2, 4) e é perpendicular ao plano $\pi: x - 3y + 2z - 5 = 0$.

51) Obter equações paramétricas das retas nos casos:

a) A reta passa por A(-1, 0, 2) e é paralela a cada um dos planos $\pi_1: 2x + y + z + 1 = 0$ e $\pi_2: x - 3y - z - 5 = 0$.
b) A reta passa pela origem, é ortogonal à reta $r: 2x = y = 3z$ e paralela ao plano $\pi: x - y - z + 2 = 0$.

52) Escrever uma equação geral do plano que passa por A(-1, 2, -1) e é paralelo a cada uma das retas $r_1: y = x, z = 1 - 3x$ e $r_2: 2x = y = 3z$.

53) Achar equações paramétricas da reta r que passa por A, é paralela ao plano π e concorrente com a reta s, nos casos:

a) A(2, 1, -4), $\pi: x - y + 3z - 5 = 0$, $s: x = 1 + 3t, \quad y = 3 - t, \quad z = -2 - 2t$;
b) A(3, -2, -4), $\pi: 3x - 2y - 3z + 5 = 0$, $s: x = 2 + t, \quad y = -4 - 2t, \quad z = 1 + 3t$.

Determinar ainda o ponto de interseção entre r e s.

54) Dada a reta $r: x = 3 + t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = -1 + 2t$, determinar equações reduzidas das retas projeções de r sobre os planos xOy e xOz.

55) Encontrar equações paramétricas da reta que passa por A(3, 6, 4), intercepta o eixo Oz e é paralela ao plano $\pi: x - 3y + 5z - 6 = 0$.

Nos problemas de 56 a 62 apresentar uma equação geral dos planos:

56) O plano que passa por $A(-1, 2, -4)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1: x + z = 2$ e $\pi_2: y - z = 0$.

57) O plano que intercepta os eixos coordenados nos pontos de abscissa, ordenada e cota iguais a -3, 6 e -5, respectivamente.

58) O plano que passa por $A(1, -3, 4)$ e intercepta os três semi-eixos de mesmo sinal a igual distância à origem do sistema.

59) O plano paralelo ao eixo dos z e que intercepta o eixo dos x em -3 e o dos y em 4.

60) O plano paralelo ao plano xOz e que intercepta o eixo dos y em -7.

61) O plano que passa pela origem e é paralelo às retas
$r_1: y = -x, z = 2$ e $r_2: (x, y, z) = (2, -1, 4) + t(1, 3, -3)$.

62) O plano que passa por $A(-1, 2, 5)$ e é perpendicular à interseção dos planos
$\pi_1: 2x - y + 3z - 4 = 0$ e $\pi_2: x + 2y - 4z + 1 = 0$.

63) Estabelecer equações gerais dos planos bissetores dos ângulos formados pelos planos xOz e yOz.

64) Calcular os valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π:
a) $r: x = 2 - 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 3$ e $\pi: 2mx - ny - z + 4 = 0$
b) $r: (x, y, z) = t(2, m, n) + (n, 2, 0)$ e $\pi: x - 3y + z = 1$

65) Calcular k de modo que a reta determinada por $A(1, -1, 0)$ e $B(k, 1, 2)$ seja paralela ao plano $\pi: x = 1 + 3h, \quad y = 1 + 2h + t, \quad z = 3 + 3t$.

Nos problemas 66 e 67, obter uma equação geral do plano que contenha o ponto e a reta dados:

66) $A(3, -2, -1)$ e $r: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}$

67) $A(1, 2, 1)$ e a reta interseção do plano $x - 2y + z - 3 = 0$ com o plano yOz.

68) Mostrar que as retas
$r_1: \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$
são paralelas e encontrar uma equação geral do plano determinado por estas retas.

69) Determinar o ponto P de interseção dos planos $2x - y + z - 8 = 0$, $x + 2y - 2z + 6 = 0$ e $3x - z - 3 = 0$ e uma equação geral do plano determinado por P e pela reta $r: x = y$, $z = 2y$.

70) Dadas as retas $r_1: y = -2x, \quad z = x$ e $r_2: x = 2 - t, \quad y = -1 + t, \quad z = 4 - 2t$, determinar
a) o ponto P' simétrico de $P(1, 0, 5)$ em relação à reta r_1;
b) o ponto O' simétrico de $O(0, 0, 0)$ em relação à reta r_2.

71) Achar o ponto N, projeção ortogonal do ponto $P(3, -1, -4)$ no plano determinado pelos pontos $A(2, -2, 3)$, $B(4, -3, -2)$ e $C(0, -4, 5)$. Qual o ponto simétrico de P em relação a este plano?

72) O plano $\pi: 3x + 2y + 4z - 12 = 0$ intercepta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C. Calcular:
a) a área do triângulo ABC;
b) a altura deste triângulo relativa à base que está no plano xOz;
c) o volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados.

Respostas de Problemas Propostos

1) a) $(1, 3, 2)$ b) $(0, 6, 2)$ c) $k = \frac{1}{2}$ d) $(2, -4, -2)$ e) $k = -12$

2) $2x - 3y - z - 13 = 0$

3) $2x - 3y + 4z - 4 = 0$

4) $4x + 4y + 2z + 3 = 0$

5) Existem infinitos. Um deles é: $x = t, \quad y = h, \quad z = -6 + 3h - 2t$

6) $2x - 2y - z + 4 = 0$

7) $3x + 6y + 2z - 7 = 0$ e $\begin{cases} x = 1 - 2h \\ y = 2h + t \\ z = 2 - 3h - 3t \end{cases}$

8) $2x + 3y - z = 0$ e $\begin{cases} x = h - t \\ y = h + t \\ z = 5h + t \end{cases}$

9) $3x + 2y - 6 = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 4h - 2t \\ y = 6h + 3t \\ z = -1 + 4h + 5t \end{cases}$

10) $x - 2y = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 6h - 2t \\ y = 1 - 3h - t \\ z = -h + t \end{cases}$

11) $z - 3 = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 5h + 2t \\ y = 1 - 2h + t \\ z = 3 \end{cases}$

12) $\alpha = 3$

13) $3x - 2y - 5z - 16 = 0$

14) $3x - 12y + 2z + 25 = 0$

15) $x - 12y - 10z - 5 = 0$

16) $2x - y - 3 = 0$

17) $x - 7y - 4z + 17 = 0$

18) $x + y + z - 6 = 0$

19) $x + y + 3z - 3 = 0$

20) $5x - 2y + 4z - 21 = 0$

21) $6x + 6y - z + 9 = 0$

22) $2x + y - 2z + 3 = 0$

23) $x - 9y - 5z + 33 = 0$

24) $x + y = 0$

25) $3x + 2y - 6 = 0$

26) $y - 2z + 4 = 0$

27) $x + 2z - 2 = 0$

28) $z = 3$

29) $y = 4$

30) $y + 2z = 0$

32) a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) arc cos $\frac{2}{\sqrt{5}}$ d) arc cos $\frac{3}{\sqrt{14}}$

33) 1 ou 7

34) a) -12 b) 2

35) a) 10 e $-\frac{1}{2}$ b) -6 e não existe valor para m

36) a) sim b) sim

37) m = 10 e n = 14

38) m = -4 e n = 2

39) m = $\frac{5}{3}$ e n = -2

40) $\begin{cases} y = -11x + 11 \\ z = -7x + 6 \end{cases}$

41) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ z = 2x - 4 \end{cases}$

42) $\begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 1 \end{cases}$

43) $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = t - 2 \end{cases}$

44) $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \\ z = 5 \end{cases}$

45) (6, -3, -2)

46) (2, -8, -1)

47) (1, -3, 7)

48) a) $(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ b) $(\frac{18}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11})$ c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ z = 0 \end{cases}$

49) a) x = 5 + 2t, y = 2 + t, z = 3 + t b) (1, 0, 1) c) (-3, -2, -1) d) $2\sqrt{6}$

50) y = -3x + 7, z = 2x - 2

51) a) x = 2t - 1, y = 3t, z = -7t + 2 b) x = 4t, y = -5t, z = 9t

52) 20x - 11y + 3z + 45 = 0

53) a) x = 2 + 7t, y = 1 + t, z = -4 - 2t e $\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}, -5\right)$

b) x = 3 - 2t, y = -2 + 3t, z = -4 - 4t e (-5, 10, -20)

54) y = -2x + 7, z = 0 e z = 2x - 7, y = 0

55) x = 3 + t, y = 6 + 2t, z = 4 + t

56) x - y - z - 1 = 0

57) 10x - 5y + 6z + 30 = 0

58) x + y + z - 2 = 0

59) 4x - 3y +12 = 0

60) y = -7

61) 3x + 3y + 4z = 0

62) 2x - 11y - 5z + 49 = 0

63) x + y = 0 e x - y = 0

64) a) m = $-\frac{1}{8}$, n = $-\frac{1}{2}$ b) m = 3, n = 7

65) 3

66) 2x + 3y + z + 1 = 0

67) 6x - 2y + z - 3 = 0

68) 4x + 2y - 3z + 5 = 0

69) P(2, -1, 3), 5x + y - 3z = 0

70) a) P'(1, -4, -3) b) O'$(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$

71) N(5, -2, -3), (7, -3, -2)

72) a) $3\sqrt{29}$ u.a. b) $\frac{6\sqrt{29}}{5}$ u.c. c) 12 u.v.