10,0 / 0,0

UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Integral (ECI007 – EC-MR07) SEMESTRE: 2012.2

PROFESSOR: Adriano Cattai DATA: 12/09/2012

No

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Justifique suas respostas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente simbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Nunca ande somente pelo caminho traçado, pois ele conduz somente até onde os outros já foram." (Alexandre Graham Bell)

Boa Prova!

OK **Q. 1** (1,6 + 0,5 + 0,5 + 1,4).

4,0

(a) Escreva sobre o processo de integração dizendo o que é, comparando com o processo de derivação e definindo a integral indefinida. Exiba alguns exemplos ilustrando este processo. A partir do conceito da integral indefinida, verifique se as integrais estão corretas:

(a1) $\int \text{arctg}(x)dx = x \cdot \text{arctg}(x) - \ln(1 + x^2) + K$

(a2) $2\int e^x \text{sen}(x)dx = e^x(\text{sen}(x) - \cos(x)) + K$

(b) Escreva a fórmula de integração por partes e descreva como se usa. Em seguida, use-a para determinar a primitiva de $f(x) = \text{sen}(x)\sec^2(x)$

OK **Q. 2** (2,4). Determine três das integrais apresentadas abaixo.

2,4

OK (a) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$ OK (c) $\int \sec^3(x)\,dx$ OK (e) $\int \text{sen}^2(x)\cos^5(x)\,dx$

(b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (d) $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ (f) $\int \text{tg}^3(x)\sec^4(x)\,dx$

1,5 OK **Q. 3** (1,5). Dada a região R do primeiro quadrante, limitada pelas curvas $y = 2x + 1$, $(y - 1)x = 2$, $x = 4$ e $y = 1$, determine sua área e exiba seu esboço gráfico.

OK **Q. 4** (2,1). Para cada item abaixo, julgue em verdadeiro ou falso, justificando sua resposta.

2,1

F (a) Determinar as primitivas de uma função f, se resume em achar uma primitiva particular de f;

F (b) $\int f(x) \cdot g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$;

V (c) Se F e G são duas primitivas de f no intervalo I, então existe constante C tal que $F(x) - G(x) = C$, para todo $x \in I$;

Questão 4:

a) Verdadeiro, pois sendo F uma antiderivada de f e G também uma antiderivada, temos que $G(x) = F(x) + K$, assim determinar a primitiva de ~~F~~ f é achar uma primitiva particular de f, ou seja, é achar uma função ~~$F(x)+K$~~ ~~que~~ é $F(x)+K$ representa toda a família das antiderivadas de f.

b) Falso. Tem-se como contraexemplo as funções $f(x) = 2$ e $g(x) = x$, assim:

$$\int f(x) \cdot g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx \Rightarrow \int 2x\,dx = \int 2\,dx \cdot \int x\,dx \Rightarrow x^2 + K = 2x \cdot \frac{x^2}{2} + K. \ (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Logo, é possível perceber que não há como ocorrer uma igualdade na resolução acima, afinal uma será função quadrática e a outra uma função cúbica.

c) Verdadeiro. Se $H(x) = F(x) - G(x)$, sendo que $F'(x) = G'(x) = f(x)$, logo podemos dizer que $H'(x) = 0$. Sendo $H'(x) = 0$, pode-se afirmar que $H(x)$ é uma constante C. Assim, $F(x) - G(x) = C$.

OK! MUITCHO BIEM!

1,0

Questão 2:

e) $\int \sec^3(x)\,dx = \int \sec(x)\sec^2(x)\,dx$

$u = \sec(x) \Rightarrow du = tg(x) \cdot \sec(x)\,dx \qquad dv = \sec^2(x)\,dx \Rightarrow v = tg(x)$

$\int \sec^3(x)\,dx = \sec(x) \cdot tg(x) - \int tg^2(x)\sec(x)\,dx \Rightarrow \int \sec^3(x)\,dx = \sec(x)\,tg(x) - \int (\sec^2(x) - 1)\sec(x)\,dx \Rightarrow$

$\int \sec^3(x)\,dx = \sec(x) \cdot tg(x) - \int \sec^3(x)\,dx + \int \sec(x)\,dx \Rightarrow \int \sec^3(x)\,dx = \frac{\sec(x)\,tg(x) + \ln|\sec(x) + tg(x)|}{2} + K$

d) $\int sen^2(x)\cos^5(x)\,dx = \int sen^2(x)\cos^2(x)\cos^2(x)\cos(x)\,dx = \int sen^2(x)(1 - sen^2(x))(1 - sen^2(x))\cos(x)\,dx =$

$\int y^2(1-y^2)(1-y^2)\,dy = \int (y^2 - y^4)(1-y^2)\,dy = \int y^6 - 2y^4 + y^2\,dy = \frac{y^7}{7} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^3}{3} + K =$

$\frac{sen^7(x)}{7} - \frac{2\,sen^5(x)}{5} + \frac{sen^3(x)}{3} + K.$

Sendo $y = sen(x)$ e $dy = \cos(x)\,dx$.

a) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x\,dx}{e^{x^2} - 1} = \int \frac{1}{y^2 - 1}\,dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + K.$

+ OXENTE!

Sendo $y = e^x$ e $dy = e^x\,dx$.

Questão 1:

a) O processo de integração se resume em achar a função primitiva que quando derivada gerou a função a ser integrada. Ou seja, $\int f(x)\,dx = F(x) + K$, se, e somente se,

O integrando.

$[F(x)+K]' = f(x)$. Assim, comparando a integral com a derivada, pode-se afirmar que um processo é o inverso do outro, ou seja, enquanto na derivação saímos de uma função primitiva para a sua derivada, na integração saímos desta derivada para encontrar sua primitiva. Exemplificando, tem-se $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + K$ pois $[\operatorname{sen}(x)+K]' = \cos(x)$.

A integral indefinida nada mais é do que determinar a família de antiderivadas de uma função. Assim, $\int f(x)\,dx = F(x)+K$ apenas se $[F(x)+K]' = f(x)$. Além do exemplo já citado, temos também $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + K$. , MAS $\left[\frac{x^3}{3}+K\right]' = x^2+0$.

(a1) Não está correta, pois $[x\,\operatorname{arctg}(x) - \ln(1+x^2) + K]' \neq \operatorname{arctg}(x)$.

$[x\,\operatorname{arctg}(x)]' - [\ln(1+x^2)]' + [K]' = \operatorname{arctg} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} + 0 = \operatorname{arctg}(x) - \frac{x}{1+x^2}$.

(a2) Está correta, pois $\left[\frac{e^x(\operatorname{sen}(x)-\cos(x))}{2}+K\right]' = e^x \operatorname{sen}(x)$.

$\left[\frac{e^x \operatorname{sen}(x) - e^x \cos(x)}{2}\right]' = \frac{2(e^x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x) - e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x))}{4} = \frac{4e^x \operatorname{sen}(x)}{4} = e^x \operatorname{sen}(x)$.

b) A fórmula de integração por partes surge da regra da derivada do produto. Assim, temos: $[u.v]' = u'.v + v'.u \Rightarrow \int v'u = \int [u.v]' - \int u'v \Rightarrow \int u\,dv = u.v - \int v\,du$. Usamos a fórmula $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$, assim: escolhe-se uma função para u da qual seja melhor obter sua derivada (du), assim como escolhe-se para dv a função cuja integral seja facilmente obtida (v). Após ter estes 4 dados (u, du, dv e v), faz-se a aplicação da fórmula, substituindo os valores.

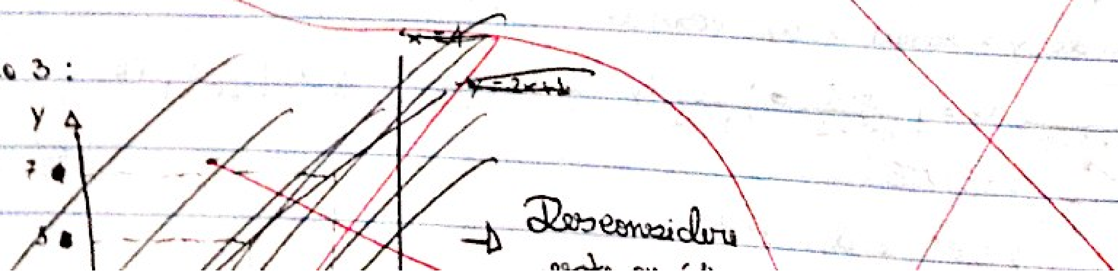
$\int \operatorname{sen}(x)\sec^2(x)\,dx = \operatorname{sen}(x).\operatorname{tg}(x) - \int \operatorname{tg}(x).\cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)\operatorname{tg}(x) + \cos(x) + K$.

$\int \operatorname{tg}(x).\cos(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}.\cos(x)\,dx = \int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)$.

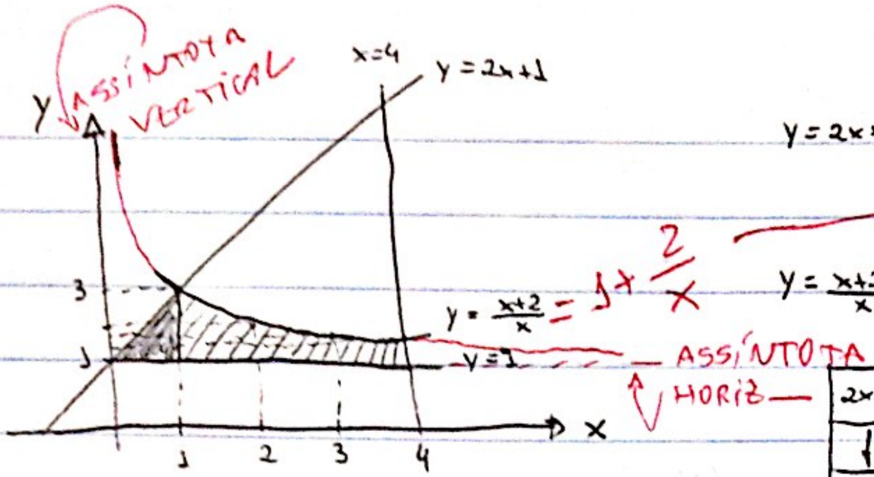
$u = \operatorname{sen}(x) \quad du = \cos(x)\,dx$

$dv = \sec^2(x)\,dx \quad v = \operatorname{tg}(x)$

Questão 3:



→ Reconsidere



$y = 2x+1$: $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$\frac{x-(x+2)}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$

$y = \frac{x+2}{x}$ $\quad y' = \frac{2x+2}{x^2}$? $\neq 0$

		-1	
$2x+2$	$-$		$+$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$y' = 0 - \frac{2}{x^2}$

$$\text{Área} = \left[\int_0^1 2x+1\,dx - \int_0^1 dx\right] + \left[\int_1^4 \frac{x+2}{x}\,dx - \int_1^4 dx\right] = [2-1] + [4\ln|2| + 5 - 3] = 4\ln|2| + 3$$?

?

0,1

$\int_0^1 2x+1\,dx = x^2 + x\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2$

$\int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$

$\int_1^4 \frac{x+2}{x}\,dx = 2\ln|x| + x\Big|_1^4 = 2\ln|4| + 4 - (2\ln|1| + 1) = 4\ln|2| + 5$ 3

$\int_1^4 dx = x\Big|_1^4 = 4 - 1 = 3$