Universidade Salvador

Disciplina: Cálculo Diferencial (Turma de Férias) Semestre: 2012.*F*

Professor: *Adriano Cattai* Data: 22/01/2013

Nome: ____

2ª Avaliação da Aprendizagem

Instruções:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta* ***preta*** *ou* ***azul****;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Deus nos concede, a cada dia, uma página de vida nova no livro do tempo. Aquilo que colocarmos nela, corre por nossa conta." (Chico Xavier)

Boa Prova!

Q. 1 (3,0). Simplificando, sempre que possível, determine a derivada de cada função abaixo.

(a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}\right)$ (b) $f(x) = \pi^{\sqrt{3x^2+6x}}$ (c) $f(x) = \dfrac{(x+1)^5}{(x^2+2)^3}$

Q. 2 (1,7). Escreva, justificando, a fórmula para cálculos aproximados com diferenciais. Em seguida, dê uma aproximação para $\sqrt[3]{65,5}$.

Q. 3 (1,8). Mostre que se $f(x) = \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\operatorname{arcsen}(x/2)$, então $f'(x) = \sqrt{4-x^2}$ e, em seguida, determine o ponto em a reta tangente seja ortogonal a reta $r : y + 2x = 2$.

Q. 4 (1,8). Estude a monotonicidade da função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ e determine seus extremos.

Q. 5 (1,7). Um estudante quer construir um viveiro retangular para seu hamster, usando a parede de um comodo como um dos lados e cercando os demais três lados com 3 metros de tela disponíveis, obtendo a maior área retangular possível. Com o uso do teste da primeira derivada, determine as dimensões do viveiro.

RESOLUÇÃO MANUSCRITA !

o,o

Q1:

ⓐ $y = tg\left(\sqrt{sen(x^2)}\right)$

$$y' = sec^2\left(\sqrt{sen(x^2)}\right) \cdot \left[\sqrt{sen(x^2)}\right]'$$

$$= sec^2\left(\sqrt{sen(x^2)}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{sen(x^2)}} \cdot \left[sen(x^2)\right]'$$

$$= sec^2\left(\sqrt{sen(x^2)}\right) \cdot \frac{cos(x^2) \cdot [x^2]'}{2 \cdot \sqrt{sen(x^2)}}$$

$$= \frac{\cancel{2}x \cdot cos(x^2) \cdot sec^2\left(\sqrt{sen(x^2)}\right)}{\cancel{2} \cdot \sqrt{sen(x^2)}}.$$

ⓑ $y = \pi^{\sqrt{3x^2+6x}}$

$$y' = \pi^{\sqrt{3x^2+6x}} \cdot ln(\pi) \cdot \left[\sqrt{3x^2+6x}\right]'$$

$$y' = \pi^{\sqrt{3x^2+6x}} \cdot ln(\pi) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3x^2+6x}} \cdot \left[3x^2+6x\right]'$$

$$y' = \frac{ln(\pi) \cdot (3x+3) \cdot \pi^{\sqrt{3x^2+6x}}}{\sqrt{3x^2+6x}}.$$

ⓒ $y = \frac{(x+1)^5}{(x^2+2)^3}$

$$y' = \frac{[(x+1)^5]' \cdot (x^2+2)^3 - (x+1)^5 \cdot [(x^2+2)^3]'}{(x^2+2)^6}$$

$$= \frac{5(x+1)^4 \cdot (x^2+2)^3 - (x+1)^5 \cdot 3 \cdot (x^2+2)^2 \cdot 2x}{(x^2+2)^6}$$

$$= \frac{(x+1)^4 \cdot (x^2+2)^2 \cdot [5(x^2+2) - (x+1) \cdot 6x]}{(x^2+2)^6} = \frac{(x+1)^4 \cdot [-x^2-6x+1}{(x^2+2)^4}$$

Q2: A fórmula, para $\Delta x \approx 0$, é

$$f(x_p + \Delta x) - f(x_p) \approx f'(x_p) \cdot dx$$

em que $dx = \Delta x$. A justificativa olhe no caderno ou no livro.

P/ aproximar $\sqrt[3]{65,5}$, usaremos $x_p = 64$, $\Delta x = 1,5 = \frac{3}{2}$ e $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Como

$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, temos $f(64) = 4$ e

$$f'(64) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(64)^2}} = \frac{1}{3 \cdot 16}.$$

Então,

$$\sqrt[3]{65,5} \approx \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\approx 4 + \frac{3}{3 \cdot 16 \cdot 2}$$

$$\approx 4 + \frac{1}{32}.$$

Q 3: $y = \dfrac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\,\cancel{\text{arctg}}\,\overset{\text{arcsen}}{}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$$y' = \frac{1}{2}\left[x\cdot\sqrt{4-x^2}\right]' + 2\cdot\left[\cancel{\text{arctg}}\overset{\text{arcsen}}{}\left(\frac{x}{2}\right)\right]'$$

$$= \frac{1}{2}\left(1\cdot\sqrt{4-x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}\right) + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-x^2+2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2}.$$

0,0

Como $r \perp t$, então $a_t \cdot a_r = -1$. Sendo $a_r = -2$, logo $a_t = \frac{1}{2}$. Sabendo que $a_t = f'(x_p)$, teremos:

$$\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2} \implies 4 - x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\implies x^2 = 4 - \frac{1}{4}$$

$$\implies x^2 = \frac{15}{4}$$

Assim, teremos dois pontos:

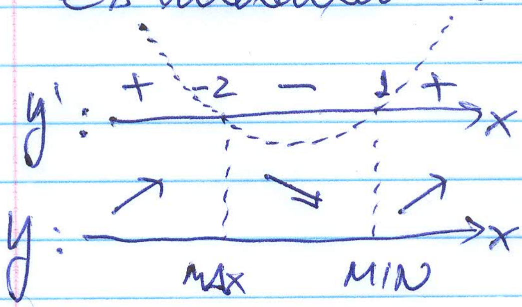
$$x_p = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{ou} \quad x_p = -\frac{\sqrt{15}}{2}$$

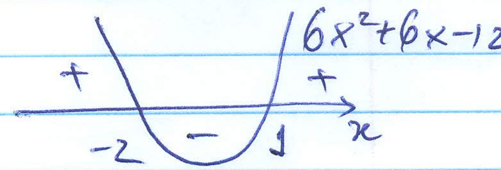
Q4: $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

$y' = 6x^2 + 6x - 12$ e $y' = 0$ se $6x^2 + 6x - 12 = 0$,

donde $x = -2$ ou $x = 1$.

Estudando o sinal de y', temos:





Logo, $x = -2$ é ponto de máximo e $x = 1$ é ponto de mínimo.

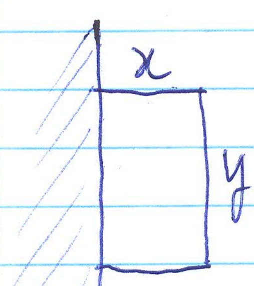
Além disso,

f é crescente em $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ e

f é decrescente em $(-2, 1)$.

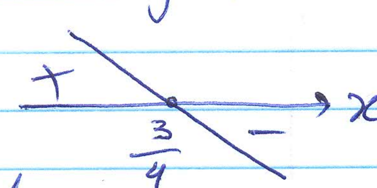
Q5:

$2x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 2x$



área $= x \cdot y = 3x - 2x^2 = f(x)$

$f'(x) = 3 - 4x$:



Logo $x = \frac{3}{4}$ é ponto de máximo p/ a área, pois a $f(x)$ é crescente p/ $x < \frac{3}{4}$ e decrescente p/ $x > \frac{3}{4}$.

Ainda $y = \frac{3}{2} = 1{,}5$ e $x = \frac{3}{4} = 0{,}75$ são as dimensões.