UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (Turma de Férias)

SEMESTRE: 2012.F

PROFESSOR: *Adriano Cattai*

DATA: 14/01/2013

NOME: ____________________

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Nunca ande somente pelo caminho traçado, pois ele conduz somente até onde os outros já foram." (Graham Bell)

Boa Prova!

***Q.* 1** (2,0). Exiba o gráfico de uma função $f : [-6, 4] \to \mathbb{R}$ que, pelo menos, atenda cada item abaixo:

(a) $\lim\limits_{x \to -6^+} f(x) = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$

(c) $\nexists \lim\limits_{x \to -3} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) < 0$

(e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$

(f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$

(g) $x = 1$ é ass. vertical

(h) f descontínua em $x = 0$

***Q.* 2** (4,0). Determine cada limite abaixo:

(a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x + 2}}{1 - x^3}$

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp\left(\dfrac{5 + 3\text{sen}(1 - x)}{x}\right)$ [Obs: $\exp(\bigstar) = e^{\bigstar}$]

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x\cos(x)}{x^2 \text{sen}(x)}$

***Q.* 3** (2,0). Com a definição de drivada, determine a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ no ponto de ordenada $1/2$. Com este resultado escreva a equação da reta tangente e da reta normal, no referido ponto.

***Q.* 4** (2,0). Exiba o esboço gráfico da função $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ dada ao lado. Determine os limites laterais em 1, em 2 e em 3. Investigue a continuidade de f.

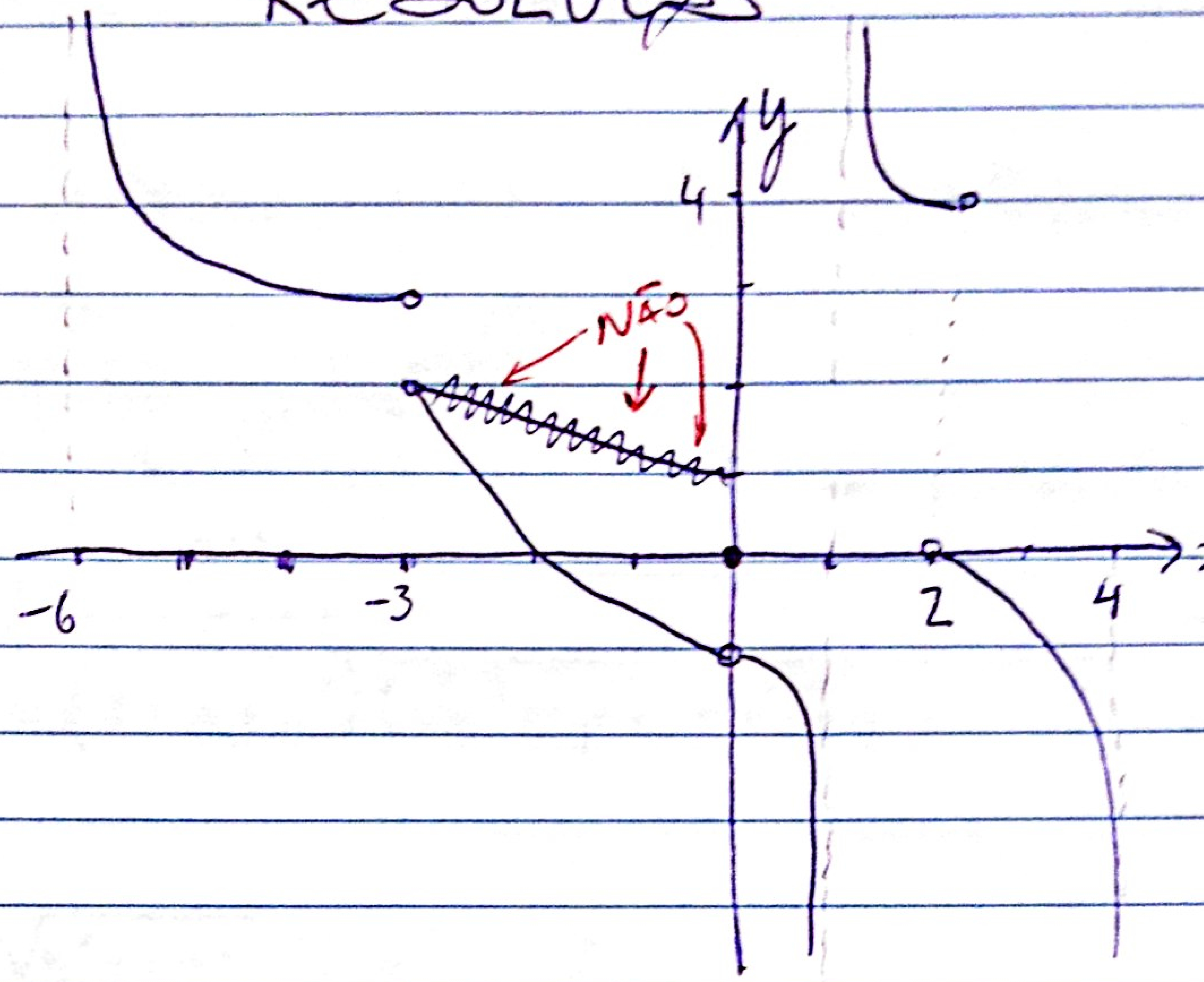
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se} \quad x \in [1, 2] \\ 4 - x & \text{se} \quad x \in (2, 3) \\ x - 2 & \text{se} \quad x \in (3, 5] \\ 2 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

OBS: RESOLUÇÃO NÃO DIGITADA POR FALTA DE CORAGEM.

o.o

RESOLUÇÃO

Q1:



Q2:

ⓐ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+4x^2+5x+2} = \dfrac{(-2)^3+2\cdot(-2)^2-2+2}{(-2)^3+4\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)+2} = \dfrac{0}{0}$,

indeterminação.

Fatorando:

	1	2	1	2
−2	1	0	+1	0

$\Rightarrow (x+2)\cdot(x^2+1)$

	1	4	5	2
−2	1	2	1	0

$\Rightarrow (x+2)\cdot(x^2+2x+1)$

$$\lim \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+4x^2+5x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2+1)}{\cancel{(x+2)}\cdot(x+1)^2} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(-2)^2+1}{(-2+1)^2} = 5.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x+2}}{1-x^3} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1-1} = \dfrac{0}{0}$, indeterminação. Racionalizando, temos:

$$\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x+2})\cdot(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x+2})}{(1-x^3)\cdot(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x+2})} = \frac{x^2+x+1-(x+2)}{(1-x^3)(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x+2})}$$

$$= \frac{\cancelto{-1}{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(1-x)}(1+x+x^2)\cdot(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x+2})} = \frac{-(x+1)}{(1+x+x^2)(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x+2})}$$

$\therefore$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x+2}}{1-x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)}{(1+x+x^2)(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x+2})}$$

$$= \frac{-2}{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{3})} = \frac{-1}{3\sqrt{3}}.$$

(c) Como $\exp(*) = e^{*}$, então

$$\lim_{x\to-\infty}\exp\left(\frac{5+3\,\text{sen}(1-x)}{x}\right) = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5+3\cdot\text{sen}(1-x)}{x}}.$$

Como $-1 \le \text{sen}(*) \le 1$, então $-3 \le \text{sen}(1-x) \le 3$ e $2 \le 5+3\cdot\text{sen}(1-x) \le 8$. Isso mostra que $g(x) = 5+3\,\text{sen}(1-x)$ é limitada.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, então

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot(5+3\,\text{sen}(1-x)) = 0 \text{ e } \lim_{x\to-\infty}\exp\left(\frac{5+3\,\text{sen}(1-x)}{x}\right) = 1$$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos(x)}{x^2 \cdot \text{sen}(x)} = \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0}$, indeterminação.

Assim, podemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos(x)}{x^2 \cdot \text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos(x))}{x^2 \cdot \text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2 \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x}}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{L1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen}(x)}}_{L2}.$$

p/ L1, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}{x^2 \cdot (1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2 \cdot (1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2 \cdot (1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

p/ L2, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\text{sen}(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos(x)}{x^2 \cdot \text{sen}(x)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$

Q3: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 3.$

Daí,

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{2-(x-1)}{2(x-1)}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3-x}{2(x-1)}}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{3-x}{2(x-1)} \cdot \frac{1}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-1}{2(x-1)} = -\frac{1}{4}.$$

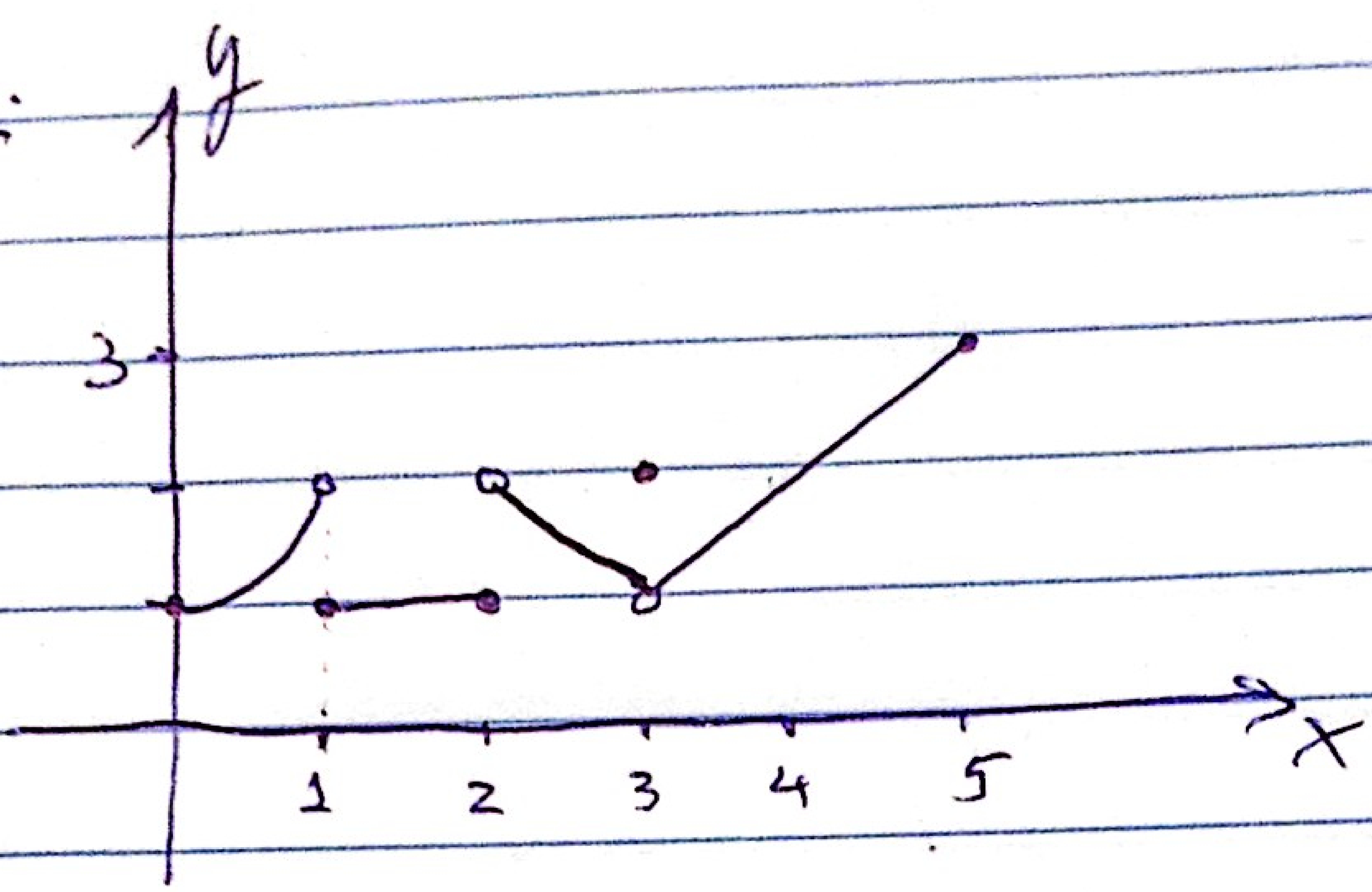
Como a derivada no ponto é a inclinação da reta tangente, então $a_t = -\frac{1}{4}$ e $a_n = 4$. Daí

$$t: y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (x-3) \Rightarrow 4y - 2 = -x + 3$$

$$\Rightarrow \boxed{t: 4y + x = 5}.$$

$$n: y - \frac{1}{2} = 4(x-3) \Rightarrow \boxed{n: 2y = 8x - 23}.$$

Q4.



A partir do gráfico acima, temos:

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$;

- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$;

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 3^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 1$.

Daí, temos que f é descontínua em $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. Em $x = 1$ e em $x = 2$ pelo fato de não existir o ~~lim~~ limite bilateral. Já em $x = 3$, pelo motivo que a imagem não é igual ao limite.