INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Sistemas de Equações Lineares

Uma **equação linear** em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\,,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais;

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Usando o produto de matrizes que definimos na seção anterior, o sistema linear acima pode ser escrito como uma equação matricial

$$\boxed{A\,X = B,}$$

em que

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right], \quad X = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] \quad \text{e} \quad B = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right].$$

Uma **solução** de um sistema linear é uma matriz $S = \left[\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{array}\right]$ tal que as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado **conjunto solução** ou **solução geral** do sistema. A matriz A é chamada **matriz do sistema linear.**

Exemplo 1.10. O sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 0 \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução (geral) do sistema acima é $x = -1/3$ e $y = 2/3$ (verifique!) ou

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. O outro sistema é obtido depois de aplicar sucessivamente uma série de operações, que não alteram a solução do sistema, sobre as equações. As operações que são usadas são:

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Estas operações são chamadas de **operações elementares**. Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear somente os coeficientes do sistema são alterados, assim podemos aplicar as operações sobre a matriz de coeficientes do sistema, que chamamos de **matriz aumentada**, ou seja, a matriz

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Definição 1.5. Uma **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz é uma das seguintes operações:

(a) Trocar a posição de duas linhas da matriz;

(b) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;

(c) Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

O próximo teorema garante que ao aplicarmos operações elementares às equações de um sistema o conjunto solução não é alterado.

Teorema 1.2. *Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$, são tais que a matriz aumentada $[C \mid D]$ é obtida de $[A \mid B]$ aplicando-se uma operação elementar, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.*

Dois sistemas que possuem o mesmo conjunto solução são chamados **sistemas equivalentes**. Portanto, segue-se do Teorema 1.2 que aplicando-se operações elementares às equações de um sistema linear obtemos sistemas equivalentes.

1.2.1 Método de Gauss-Jordan

O método que vamos usar para resolver sistemas lineares consiste na aplicação de operações elementares às linhas da matriz aumentada do sistema até que obtenhamos uma matriz numa forma em que o sistema associado a esta matriz seja de fácil resolução.

Vamos procurar obter uma matriz numa forma em que todas as linhas não nulas possuam como primeiro elemento não nulo (chamado **pivô**) o número 1 . Além disso, se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos terão que ser iguais a zero. Vamos ver no exemplo seguinte como conseguimos isso. Neste exemplo veremos como a partir do faturamento e do gasto com insumos podemos determinar quanto foi produzido de cada produto manufaturado em uma indústria.

Definição 1.6. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está na forma **escalonada reduzida** quando satisfaz as seguintes condições:

(a) Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) ocorrem abaixo das linhas não nulas;

(b) O **pivô** (1º elemento não nulo de uma linha) de cada linha não nula é igual a 1;

(c) O pivô de cada linha não nula ocorre à direita do pivô da linha anterior.

(d) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Se uma matriz satisfaz as propriedades (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d), dizemos que ela está na forma **escalonada**.

Exemplo 1.12. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são escalonadas reduzidas, enquanto

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são escalonadas, mas **não** são escalonadas reduzidas.

Este método de resolução de sistemas, que consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até que a matriz do sistema esteja na forma escalonada reduzida, é conhecido como **método de Gauss-Jordan**.

Observação. Para se encontrar a solução de um sistema linear não é necessário transformar a matriz aumentada do sistema na sua forma escalonada reduzida, mas se a matriz está nesta forma, o sistema associado é o mais simples possível. Um outro método de resolver sistemas lineares consiste em, através da aplicação de operações elementares à matriz aumentada do sistema, se chegar a uma matriz que é somente **escalonada** (isto é, uma matriz que satisfaz as condições (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d) da Definição 1.6). Este método é conhecido como **método de Gauss**.

O próximo resultado mostra que um sistema linear que tenha mais de uma solução não pode ter um número finito de soluções.

Proposição 1.3. *Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$. Se o sistema linear $A\,X = B$ possui duas soluções distintas $X_0 \neq X_1$, então ele tem infinitas soluções.*
