# 6

# AUTOVALORES E AUTOVETORES

## 6.1 INTRODUÇÃO

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo, $T: V \to V$ gostaríamos de saber que vetores seriam levados neles mesmos por esta transformação. Isto é, dada $T: V \to V$, quais são os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$? ($\mathbf{v}$ é chamado *vetor fixo*). Tentaremos elucidar esta questão, considerando algumas transformações que já foram estudadas no capítulo anterior.

### 6.1.1 Exemplos

*Exemplo 1*:

$I: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Aplicação identidade)
$(x, y) \mapsto (x, y)$
Neste caso, todo $\mathbf{R}^2$ é fixo uma vez que $I(x, y) = (x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

*Exemplo 2:*

$r_x: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Reflexão no eixo-x)
$(x, y) \mapsto (x, -y)$ ou



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente

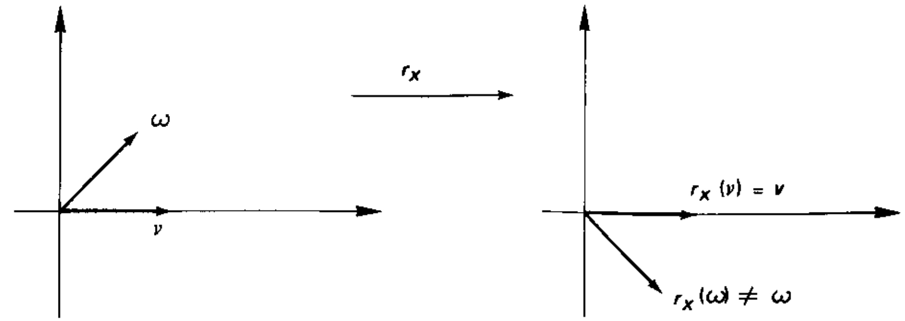


**Figura 6.1.1**

Intuitivamente podemos notar que todo vetor pertencente ao eixo-x é mantido fixo pela transformação $r_x$. De fato:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $r_x(x, 0) = (x, 0)$.

Ainda mais, estes vetores são os únicos com esta propriedade, visto que, procurando vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

caímos no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 0y = x \\ 0x - \ y = y \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = x \\ -y = y \end{cases}$$

As únicas soluções deste sistema são vetores do tipo $(x, 0)$, ou seja, são os vetores pertencentes ao eixo-x.

*Exemplo 3:*

$N: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Aplicação nula)
$(x, y) \mapsto (0, 0)$

Neste caso, o único vetor que é fixo pela aplicação dada é o vetor nulo, $N(0, 0) = (0, 0)$.

Passaremos agora para o seguinte problema: Dada uma transformação linear de um espaço vetorial $T: V \to V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor $\mathbf{v} \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbf{R}$ tais que

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

Neste caso $T(\mathbf{v})$ será um vetor de mesma "direção" que $\mathbf{v}$. Por vetores de mesma "direção" estaremos entendendo vetores sobre a mesma reta suporte.

Como $\mathbf{v} = 0$ satisfaz a equação para todo $\lambda$, estaremos interessados em determinar vetores $\mathbf{v} \neq 0$ satisfazendo a condição acima. O escalar $\lambda$ será chamado *autovalor* ou *valor característico de $T$* e o vetor $\mathbf{v}$ um *autovetor* ou *vetor característico de $T$*. Vamos formalizar este conceito.

Passaremos doravante a dar a designação usual de *operador* linear para uma transformação linear $T: V \to V$ (de um espaço vetorial nele mesmo).

**6.1.2 Definição:** Seja $T: V \to V$ um operador linear. Se existirem $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq 0$, e $\lambda \in \mathbf{R}$ tais que $T\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, $\lambda$ é um *autovalor* de $T$ e $\mathbf{v}$ um *autovetor* de $T$ associado a $\lambda$.

Observe que $\lambda$ pode ser o número 0, embora $\mathbf{v}$ não possa ser o vetor nulo. Daremos a seguir exemplos de como calcular autovalores e autovetores, usando a definição.

### 6.1.3 Exemplos

*Exemplo 1:*

$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$\mathbf{v} \mapsto 2\mathbf{v}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, 2 é um autovalor de $T$ e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor de $T$ associado ao autovalor 2. Observe geometricamente:



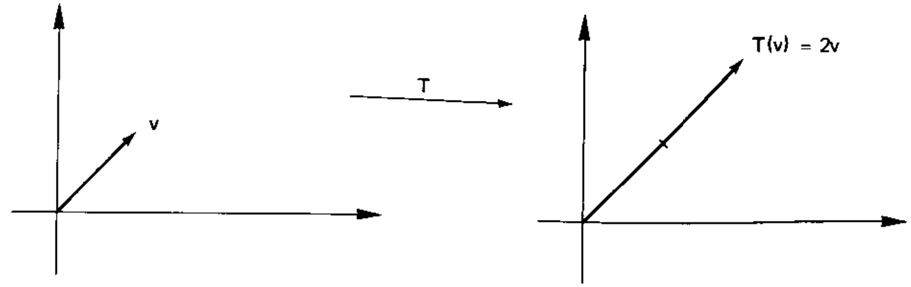


Figura 6.1.2

De um modo geral toda transformação

$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$\mathbf{v} \mapsto \alpha \mathbf{v}$, $\alpha \neq 0$

tem $\alpha$ como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. Observe que $T(\mathbf{v})$ é sempre um vetor de mesma direção que $\mathbf{v}$. Ainda mais, se:

*i)* $\alpha < 0$, $T$ inverte o sentido do vetor.
*ii)* $|\alpha| > 1$, $T$ dilata o vetor.
*iii)* $|\alpha| < 1$, $T$ contrai o vetor.
*iv)* $\alpha = 1$, $T$ é a identidade.

*Exemplo 2:*

$r_x: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Reflexão no eixo-x)
$(x, y) \mapsto (x, -y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Os vetores da forma $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ são tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, todo vetor $(0, y)$, $y \neq 0$, é autovetor de $r_x$ com autovalor $\lambda = -1$. Como já vimos no Exemplo 2 da seção 6.1.1 os vetores $(x, 0)$ são fixos por esta transformação, $r_x(x, 0) = 1(x, 0)$, ou seja, $(x, 0)$ são autovetores correspondentes ao autovalor 1.

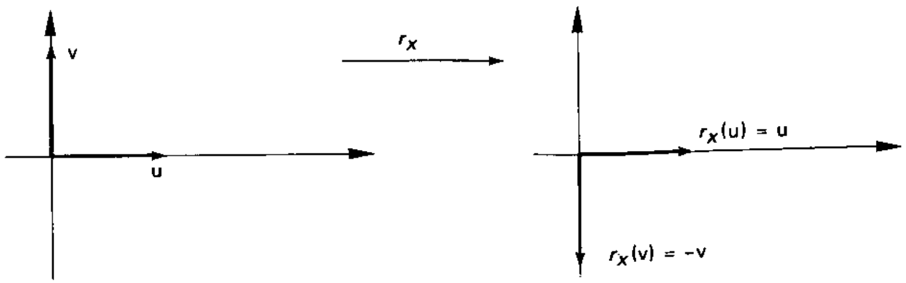


Figura 6.1.3

*Exemplo 3*:

$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Rotação de 90° em torno da origem)
$(x, y) \mapsto (-y, x)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Note que nenhum vetor diferente de zero é levado por $T$ num múltiplo de si mesmo. Logo, $T$ não tem nem autovalores nem autovetores.

Este é um exemplo de que nem todo operador linear possui autovalores e autovetores. Este fato será comentado melhor posteriormente (veja o Exemplo 2 de 6.2.2)

*Exemplo 4*:

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Então $\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ y \end{bmatrix}$

e $T_{\mathbf{A}}(x, y) = (2x + 2y, y)$.

Para procurar os autovetores e autovalores de $T_{\mathbf{A}}$ resolvemos a equação $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ ou

$$\begin{bmatrix} 2x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

Assim, temos o sistema de equações



$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda x \\ \quad\quad\; y = \lambda y \end{cases}$$

Consideremos os casos quando *i*) $y \neq 0$ e *ii*) $y = 0$.

*i*) Se $y \neq 0$, então da segunda equação $\lambda = 1$.

Logo $2x + 2y = x$ e $y = -\frac{1}{2}x$. Obtemos assim, para o autovalor $\lambda = 1$, os autovetores do tipo $(x, -\frac{1}{2}x)$, $x \neq 0$. Em outras palavras, como $T(x, -\frac{1}{2}x) = 1(x, -\frac{1}{2}x)$, os vetores sobre a reta $x = -2y$ são mantidos fixos pela transformação $T$.

*ii*) Se $y = 0$, $x$ deve ser diferente de 0, pois senão o autovalor $(x, y)$ seria nulo, o que não pode acontecer pela definição de autovetor. Da primeira equação, $2x + 0 = \lambda x$ ou $\lambda = 2$. Portanto, outro autovalor é 2 e qualquer vetor não nulo $(x, 0)$ é um autovetor correspondente. Então, todos os vetores sobre o eixo-x são levados em vetores de mesma direção: $T(x, 0) = (2x, 0)$ ou $T(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$.

Temos assim, para esta transformação $T$, autovetores $(x, -\frac{1}{2}x)$, $x \neq 0$, associados ao autovalor 1 e autovetores $(x, 0)$, $x \neq 0$, associados ao autovalor 2. Todos os outros vetores do plano são levados por $T$ em vetores de direções diferentes.

**6.1.4 Teorema:** Dada uma transformação $T: V \to V$ e um autovetor $\mathbf{v}$ associado a um autovalor $\lambda$, qualquer vetor $w = \alpha\mathbf{v}$ ($\alpha \neq 0$) também é autovetor de $T$ associado a $\lambda$.

Observe isto nos exemplos e mostre que em geral isto é válido. Mais ainda, mostre que o conjunto formado pelos autovetores associados a um autovalor $\lambda$ e o vetor nulo é um subespaço vetorial de $V$, isto é, $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ é subespaço de $V$. (Veja o Exercício 20 da secção 6.3). Vamos dar um nome a este subespaço.

**6.1.5 Definição:** O subespaço $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ é chamado o *subespaço associado ao autovalor* $\lambda$.

As noções de autovetor e autovalor de uma transformação linear (ou matriz) são fundamentais por exemplo em Física Atômica porque os níveis de energia dos átomos e moléculas são dados por autovalores de determinadas matrizes. Também o estudo dos fenômenos de vibração, análise de estabilidade de um avião e muitos outros problemas de Física levam à procura de autovalores e autovetores de matrizes.

No Capítulo 12 você terá uma idéia de como as noções de espaço vetorial, autovalores e autovetores são utilizadas na resolução de sistemas de equações diferenciais, e muitas situações físicas são descritas por um sistema de equações diferenciais. (Veja o Exemplo 3 de 12.2.1 e os Exercícios de 12.4.)

Outra aplicação importante que estamos visando é a classificação de cônicas e quádricas que será vista no Capítulo 11. Nela, autovalores e autovetores serão usados para "normalizar" formas quadráticas. Mais especificamente, eles serão usados para encontrar mudanças de referencial que permitam identificar quais as figuras geométricas que representam certas equações no plano e no espaço.

### 6.1.6 Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Dada uma matriz quadrada, **A**, de ordem n, estaremos entendendo por *autovalor e autovetor de* **A** autovalor e autovetor da transformação linear $T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, associada à matriz **A** em relação à base canônica, isto é, $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbf{R}$ de **A**, e um autovetor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, são soluções da equação $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq 0$.

*Exemplo*: Dada a matriz diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e dados os vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 0, 1)$, temos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}\mathbf{e}_1 \quad \text{e em geral,}$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = a_{ii}\mathbf{e}_i$. Então, estes vetores da base canônica de $\mathbf{R}^n$ são autovetores para **A**, e o autovetor $\mathbf{e}_i$ é associado ao autovalor $a_{ii}$.

Veremos na próxima secção que dada uma transformação linear $T: V \to V$ e fixada uma base $\beta$ podemos reduzir o problema de encontrar autovalores e autovetores para $T$ à determinação de autovalores para a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$.



## 6.2 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Observamos nos exemplos da seção anterior que se nos basearmos nas definições de autovalor e autovetor, para efetuar os cálculos que determinam seus valores, estaremos adotando um procedimento muito complicado. Por isto vamos procurar um método prático para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz real **A** de ordem $n$. Faremos um exemplo para o caso em que $n = 3$, e em seguida generalizaremos para $n$ qualquer.

*Exemplo*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Procuramos vetores $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ e escalares $\lambda \in \mathbf{R}$ tais que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Observe que se **I** for a matriz identidade de ordem 3, então a equação acima pode ser escrita na forma $\mathbf{A}\mathbf{v} = (\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$, ou ainda, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$.
Escrevendo explicitamente

$$\left( \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos então a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se escrevermos explicitamente o sistema de equações lineares equivalente a esta equação matricial, iremos obter um sistema de três equações e três incógnitas. Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, saberemos que este sistema tem uma única solução, que é a solução nula, ou seja $x = y = z = 0$. (Veja a observação final de 3.7.2.) Mas estamos interessados em calcular os autovetores de **A**, isto é, vetores $\mathbf{v} \neq 0$, tais que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$. Neste caso $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ deve ser zero, ou seja

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

E portanto $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$.

Vemos que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ é um polinômio em $\lambda$. Este polinômio é chamado o polinômio característico de **A**. Continuando a resolução, temos $(\lambda - 2)^2\,(\lambda - 3) = 0$.

Logo $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ são as raízes do polinômio característico de **A**, e portanto os autovalores da matriz **A** são 2 e 3. Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes. Resolvendo a equação $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$, para os casos:

*i*) $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases}$$

A terceira equação implica que $y = 0$ e por isso vemos na segunda que $x = 0$. Como nenhuma equação impõe uma restrição em $z$, os autovetores associados a $\lambda = 2$ são do tipo $(0, 0, z)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(0, 0, 1)]$.

*ii*) $\lambda = 3$

Resolvendo a equação $\mathbf{Av} = 3\mathbf{v}$, temos

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \\ y + 2z = 3z \end{cases}$$

Tanto da primeira equação quanto da segunda vemos que $x = -2y$ e da terceira vem $z = y$. Os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são do tipo $(-2y, y, y)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(-2, 1, 1)]$.

**6.2.1.** O que fizemos neste exemplo com uma matriz **A** de ordem 3, pode ser generalizado. Seja **A** uma matriz de ordem $n$. Quais são os autovalores e autovetores correspondentes de **A**? São exatamente aqueles que satisfazem a equação $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ ou $\mathbf{Av} = (\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$ ou ainda $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$. Escrevendo esta equação explicitamente, temos

Escrevendo esta equação explicitamente, temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$



Chamemos de **B** a primeira matriz acima. Então $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0$. Se $\det \mathbf{B} \neq 0$, sabemos que o posto da matriz **B** é $n$ e portanto o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem uma única solução. Ora, como $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (ou $\mathbf{v} = 0$) sempre é solução de um sistema homogêneo, então esta única solução seria a nula. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores **v** (soluções não nulas da equação acima) é termos $\det\mathbf{B} = 0$, ou seja,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores $\lambda$ que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados. Observamos que

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

é um polinômio em $\lambda$ de grau $n$.

$P(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) +$ termos de grau $< n$, e os autovalores procurados são as raízes deste polinômio. $P(\lambda)$ é chamado *polinômio característico* da matriz **A**.

Consideremos mais alguns exemplos para fixar melhor o processo envolvido no cálculo de autovalores e autovetores através do polinômio característico.

### 6.2.2 Exemplos

*Exemplo 1*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-3 - \lambda)\,(2 - \lambda) + 4$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 2 = P(\lambda).$$

$$P(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow (\lambda - 1)\,(\lambda + 2) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2.$$

Então os autovalores de **A** são 1 e $-2$. Procuramos agora os autovetores associados.

*i*) $\lambda = 1$

Temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + \ \ y = 0 \end{cases}$$

Então, temos que $x = y$.

Portanto os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores $\mathbf{v} = (x, x)$, $x \neq 0$.

*ii*) $\lambda = -2$.

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad x = 4y.$$

Os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = -2$ são da forma $\mathbf{v} = (4y, y)$, $y \neq 0$ (ou $\mathbf{v} = (x, \frac{1}{4}x)$).

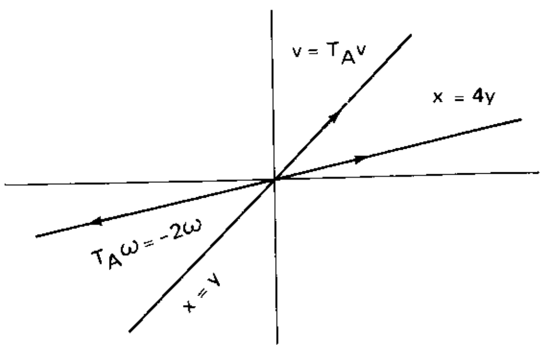


**Figura 6.2.1**

As retas acima são "invariantes" em relação a esta aplicação.



*Exemplo 2*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix} \sqrt{3} - \lambda & -1 \\ 1 & \sqrt{3} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= (\sqrt{3} - \lambda)^2 + 1$$
$$= \lambda^2 - 2\sqrt{3}\,\lambda + 4.$$

$P(\lambda) = 0$ não admite raiz real ($\Delta = -4$), logo a matriz **A** não admite autovalores (nem autovetores). Isto significa que a transformação dada pela matriz **A** não preserva a direção de nenhum vetor. $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) \neq \lambda\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq 0$.
Geometricamente, como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\operatorname{sen} 30^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix},$$

a transformação $T_{\mathbf{A}}$ dada pela matriz **A** é uma rotação de $30^\circ$ composta com uma dilatação.

$$T_{\mathbf{A}}(x, y) = (\sqrt{3}\,x - y,\ x + \sqrt{3}\,y)$$
$$T_{\mathbf{A}}(1, 0) = (\sqrt{3}, 1) \quad \text{e} \quad T_{\mathbf{A}}(0, 1) = (-1, \sqrt{3}).$$

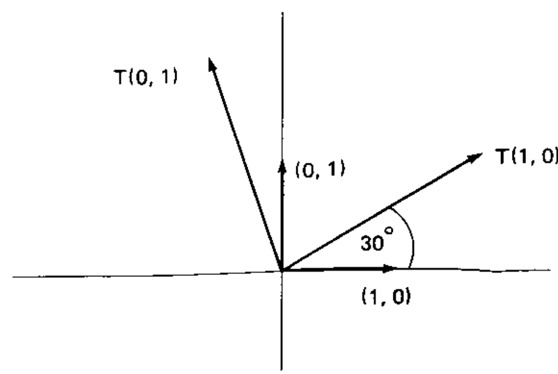


**Figura 6.2.2**

**6.2.3 Observação**

Observe que se estivéssemos trabalhando com um espaço vetorial complexo (isto é, os escalares são números complexos), o polinômio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\sqrt{3}\,\lambda + 4$ do exemplo anterior teria as raízes $\lambda = \sqrt{3} + i$ e $\lambda = \sqrt{3} - i$. Os autovetores encontrados, da mesma maneira que no caso real, são do tipo $(x, -ix)$ e $(x, ix)$ respectivamente. Assim, toda aplicação linear sobre espaços vetoriais complexos sempre admite autovalores, uma vez que seu polinômio característico sempre admite raiz. Neste caso não se tem a visão geométrica de autovetor como vetor que tem sua direção preservada pelo operador. Veremos no Capítulo 12 que autovalores e autovetores complexos aparecem na resolução de um sistema de equações diferenciais, provindo de uma situação real.

**6.2.4** Vamos apresentar agora duas matrizes que têm o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores, porém, com autovetores diferentes. Além disso, vamos resolver os sistemas de equações lineares que nos dão os autovetores usando matrizes escalonadas.

**6.2.5 Exemplos**

*Exemplo 1*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Então, $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (3 - \lambda)^2\,(-1 - \lambda)$.
Os autovalores de $\mathbf{A}$ são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

*i*) Autovetores associados a $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x \quad - 4z = 3x \\ \quad 3y + 5z = 3y \\ \qquad -z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4z = 0 \\ \ \ 5z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases}$$

Matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



A solução é: $z = 0$ e $x, y$ quaisquer.
Portanto os autovetores são do tipo $\mathbf{v} = (x, y, 0)$.

*ii*) Autovetores associados a $\lambda_2 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x \quad - 4z = -x \\ \quad 3y - 5z = -y \\ \qquad -z = -z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4x \quad - 4z = 0 \\ \quad 4y - 5z = 0 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x \quad - z = 0 \\ \quad y - \frac{5}{4}z = 0 \\ \qquad 0z = 0 \end{cases}$$

Solução: $x = z$, $y = \frac{5}{4}z$, $z$ qualquer.

Os autovetores são do tipo $\mathbf{v} = (z, \frac{5}{4}z, z)$, $z \neq 0$.

*Exemplo 2*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2\,(-1 - \lambda).$$

Observe que este polinômio é o mesmo que o do exemplo anterior. Então os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

*i*) Para $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 3y - 4z = 3x \\ 3y + 5z = 3y \\ -z = 3z \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -3y - 4z = 0 \\ 5z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0$, $z = 0$, $x$ qualquer.
Os autovetores são do tipo $\mathbf{v} = (x, 0, 0)$, $x \neq 0$.

*ii*) Para $\lambda_2 = -1$

$$\begin{cases} 3x - 3y - 4z = -x \\ 3y + 5z = -y \\ -z = -z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x - 3y - 4z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{31}{16} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e vemos que}$$

$x = -\frac{31}{16}z$, $y = -\frac{5}{4}z$, $z$ qualquer.

Os autovetores são do tipo $\mathbf{v} = (-\frac{31}{16}z, -\frac{5}{4}z, z)$, $z \neq 0$.



**6.2.6** Nesta secção definimos polinômio característico de uma matriz, ou seja, da transformação linear $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ a ela associada como em 6.1.6.

Podemos estender este conceito para qualquer transformação linear $T: V \to V$, partindo do seguinte argumento.

Seja $\beta$ uma base de $V$, então temos as equivalências:

$$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff$$
$$[T]^\beta_\beta [\mathbf{v}]_\beta = \lambda[\mathbf{v}]_\beta \iff$$
$$\left[[T]^\beta_\beta - \lambda I\right][\mathbf{v}]_\beta = 0 \iff$$
$$\det([T]^\beta_\beta - \lambda I) = 0$$

Observamos que a última condição é dada por $P(\lambda) = 0$ onde $P(\lambda)$ é o polinômio característico da matriz $[T]^\beta_\beta$ conforme o conceito dado em 6.2.1.

Neste caso $P(\lambda)$ também será chamado *polinômio característico da transformação $T$* e suas raízes serão os autovalores de $T$. O fator fundamental nesta definição é sua independência da base $\beta$ escolhida.

De fato, seja $\alpha$ uma outra base de $V$ e $A = [T]^\alpha_\alpha$. Então (veja 5.4.10),

$$\det([T]^\alpha_\alpha - \lambda I) = \det(A[T]^\beta_\beta A^{-1} - \lambda AIA^{-1}) = \det[A([T]^\beta_\beta - \lambda I) \cdot A^{-1}]$$

$$= \det(A) \cdot \det([T]^\beta_\beta - \lambda I) \cdot \det(A^{-1}) = \det([T]^\beta_\beta - \lambda I) = P(\lambda).$$

**6.2.7 Exemplos**

*Exemplo 1*: Seja $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$. Procuremos seus autovalores e autovetores. Notemos que se $\alpha$ é a base canônica de $\mathbf{R}^2$

$$[T]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e, portanto,}$$

podemos dar o polinômio característico de $T$ como $P(\lambda) = \det([T]^\alpha_\alpha - \lambda I)$. Você pode agora concluir o exemplo copiando de 6.2.2 – Exemplo 1.

*Exemplo 2*: Seja $P_1$ o espaço vetorial dos polinômios reais de grau menor ou igual a um e seja $T: P_1 \to P_1$ a transformação linear que leva o polinômio $1 + x$ em $5 + 2x$ e o polinômio $4 + x$ em $-2 \cdot (4 + x)$. Note que $\mathbf{w}_1 = 1 + x$ e $\mathbf{w}_2 = 4 + x$ são vetores LI, e portanto formam uma base $\alpha$ de $P_1$ e portanto $T$ está bem definida. Observe ainda que $T(\mathbf{w}_1) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ e $T(\mathbf{w}_2) = -2\mathbf{w}_2$.

Portanto $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico é $P(\lambda) = (1 - \lambda)(-2 - \lambda)$ e os autovalores serão, portanto, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Calculemos os autovetores associados:

*i)* $[T]^{\alpha}_{\alpha} \cdot [\mathbf{v}]_{\alpha} = 1[\mathbf{v}]_{\alpha}$ o que implica $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 3a \\ a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$

*ii)* $[T]^{\alpha}_{\alpha}[\mathbf{v}]_{\alpha} = -2[\mathbf{v}]_{\alpha}$ o que implica $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$, $b \in \mathbf{R}$

Assim, os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ são da forma

$$\mathbf{v} = a\mathbf{w}_1 + 3a\mathbf{w}_2 = 13a + 4ax, \quad \forall a$$

Ainda, os autovetores associados a $\lambda_2 = -2$ são da forma

$$\mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 = 4b + bx$$

**6.2.8** Vamos aproveitar os exemplos de 6.2.5 para introduzir o conceito de multiplicidade de um autovalor. Chamamos de *multiplicidade algébrica de um autovalor* a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico. No Exemplo 1 de 6.2.5 o autovalor $\lambda_1 = 3$ tem multiplicidade algébrica igual a 2. (Ou ainda, 3 é uma raiz dupla do polinômio característico.) No Exemplo 2 o autovalor $\lambda_1 = 3$ tem multiplicidade algébrica 2.

Observe que no Exemplo 1 encontramos para o autovalor $\lambda_1 = 3$ autovetores do tipo $\mathbf{v} = (x, y, 0)$. Note que $\{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3; x, y \in \mathbf{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) : x, y \in \mathbf{R}\} = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e portanto a dimensão deste subespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$ é 2 (dois vetores LI). Neste caso dizemos que a multiplicidade geométrica de $\lambda_1 = 3$ é 2. Mais precisamente, a *multiplicidade geométrica de um autovalor* $\lambda$ é a dimensão do subespaço $V_{\lambda}$ de autovetores associados a $\lambda$. No Exemplo 2, o autovalor $\lambda_1 = 3$ tem multiplicidade geométrica 1, visto que a dimensão de $\{(x, 0, 0); x \in \mathbf{R}\} = \{x(1, 0, 0); x \in \mathbf{R}\} = [(1, 0, 0)]$ é 1. Observe ainda que se a multiplicidade algébrica de um autovalor for 1, a multiplicidade geométrica será necessariamente igual a 1.

## 6.3 EXERCÍCIOS

1. Seja $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

   $(x, y) \mapsto (y, 2y)$.

   Mostre que $\lambda = 2$ é um autovalor de $T$ e vetores da forma $(x, 2x)$ são os autovetores correspondentes.



Ache os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares dadas:

2. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$
3. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$
4. $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$
5. $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$
6. $T : M_2 \to M_2$ tal que $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}'$ (Isto é, $T$ é a transformação que leva uma matriz na sua transposta.)
7. $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tal que $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$
8. Encontre a transformação linear $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, tal que $T$ tenha autovalores $-2$ e $3$ associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

Ache os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

19. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quais são os autovalores e autovetores de **A** de um espaço vetorial:
*a*) Real    *b*) Complexo

20. Se $\lambda$ é autovalor da transformação linear $T: V \to V$ e **v** é um autovetor associado a ele, mostre que
*a*) $k\mathbf{v}$ é outro autovetor associado a $\lambda$ se $k \neq 0$.
*b*) O conjunto formado pelos autovetores associados a $\lambda$ e o vetor nulo é subespaço de $V$.

21. Suponha que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Mostre que
*a*) Os autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ correspondentes são LI.
*b*) $T(\mathbf{v}_1)$ e $T(\mathbf{v}_2)$ são LI.

22. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
*a*) Ache os autovalores de **A** e de $\mathbf{A}^{-1}$.
*b*) Quais são os autovetores correspondentes?

23. Suponha que $\lambda$ seja autovalor de $T: V \to V$ com autovetor **v** e $\alpha$ um número não nulo. Ache os autovalores e autovetores de $\alpha T$.

24. Suponha que $\mathbf{v} \in V$ seja autovetor de $T: V \to V$ e $S: V \to V$, ao mesmo tempo com autovalores $\lambda_1$ e $\lambda_2$ respectivamente. Ache autovetores e autovalores de
*a*) $S + T$.    *b*) $S \circ T$.

25. Seja $T: V \to V$ linear
*a*) Se $\lambda = 0$ é autovalor de $T$, mostre que $T$ não é injetora.
*b*) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se $T$ não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de $T$?

26. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrizes inversíveis.
*a*) Calcule **AB** e **BA** e observe que estes produtos são distintos.
*b*) Encontre os autovalores de **AB** e os de **BA**. O que você observa?



*c*) Encontre os autovetores de **AB** e os de **BA**. O que você nota?
*d*) Motivado pelos itens anteriores, mostre que: se **A** e **B** são matrizes inversíveis de mesma ordem, os autovalores de **AB** e **BA** são os mesmos. Mostre mais ainda: se $\lambda_1$ é um autovalor de **AB** com autovetor **v**, então $\lambda_1$ é autovalor de **BA** com autovetor **Bv**. Da mesma forma, se $\lambda_2$ é um autovalor de **BA** com autovetor **w**, então $\lambda_2$ é autovalor de **AB** com autovetor **Aw**.

### 6.3.1 Respostas

3. $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\mathbf{v}_1 = (x, \sqrt{2}x)$; $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $\mathbf{v}_2 = (x, -\sqrt{2}x)$

5. $\lambda = 1$, $\mathbf{v} = ax^2 + bx + b$

7. $\lambda = 1$, $\mathbf{v} = (0, 0, 0, w)$

8. $T(x, y) = (-6y, -x + y)$

9. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = (x, 0)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = (-y, y)$

11. $\lambda = 1$, $\mathbf{v} = (x, 0, 0)$

13. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = (-y, y, 0)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = (x, 2x, -x)$; $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{v}_3 = (x, 0, x)$

16. $\lambda_1 = 4$, $\mathbf{v}_1 = (y - z, y, z)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{v}_2 = (x, 0, x)$ ou $\lambda_1 = 4$, $\mathbf{v}_1 = (y, y, 0)$; $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{v}_2 = (-z, 0, z)$; $\lambda_3 = -2$, $\mathbf{v}_3 = (x, 0, x)$

17. $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{v}_1 = (2y - 7z, y, z)$; $\lambda_2 = 9$, $\mathbf{v}_2 = (x, x, x)$

18. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = (0, y, 0, -y)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = (x, 0, -2x, 0)$; $\lambda_3 = 6$, $\mathbf{v}_3 = (x, 0, 4x, 0)$

19. *a*) $\lambda = -2$, $\mathbf{v} = (2x, x, -x)$
*b*) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{v}_1 = (2x, x, -x)$; $\lambda_2 = i$, $\mathbf{v}_2 = [(-1 + i)y, y, (1 + i)y]$; $\lambda_3 = -i$, $\mathbf{v}_3 = [(-1 - i)y, y, (1 - i)y]$

22. *a*) Os de **A** são $-1$ e $2$; os de $\mathbf{A}^{-1}$, $-1$ e $\frac{1}{2}$.
*b*) Os de **B** são $(-2y, y)$ e $(x, 2x)$; os de $\mathbf{A}^{-1}$, $(-2y, y)$ e $(x, x)$

23. Autovalor $\alpha\lambda$ com autovetor **v**.

25. *a*) Como $\lambda = 0$ é autovalor, existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $T\mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Então $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Portanto, $T$ não é injetora.
*b*) Como $T$ não é injetora, existe $\mathbf{v} \neq w$ tal que $T\mathbf{v} = Tw$.
Então $T\mathbf{v} - Tw = T(\mathbf{v} - w) = \mathbf{0} = 0 \cdot (\mathbf{v} - w)$. Portanto, 0 é autovalor de $T$ com autovetor $\mathbf{v} - w$.

26. *b*) São iguais. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$
*c*) São diferentes. $\mathbf{v}_1 = (x, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (\frac{1}{3}y, y, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (\frac{5}{4}z, -2z, z)$

**Leituras Sugeridas e Referências**

[1] Herstein, I. N.; *Tópicos de Álgebra*, Editora Polígono, São Paulo, 1970.
[2] Hoffman, K. e Kunze, R.; *Álgebra Linear*; Editora Polígono, São Paulo, 1971.

# 7

# DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

No Capítulo 5 foram introduzidas as aplicações lineares e as matrizes a elas associadas. Nosso objetivo neste capítulo será encontrar uma base do espaço vetorial na qual a matriz de um determinado operador linear seja a mais simples possível. É fácil deduzir as conveniências práticas de se trabalhar com os operadores, usando tais matrizes. Por muitos motivos, como você verá, a melhor situação possível é aquela em que conseguimos uma matriz diagonal associada a um operador.

## 7.1 BASE DE AUTOVETORES

Dado um operador linear $T: V \to V$, nosso objetivo é conseguir uma base $\beta$ de $V$ na qual a matriz do operador nesta base $([T]^{\beta}_{\beta})$ seja uma matriz diagonal, que é a forma mais simples possível de se representar um operador. Observemos inicialmente a seguinte propriedade dos autovetores.

**7.1.1 Teorema:** Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.