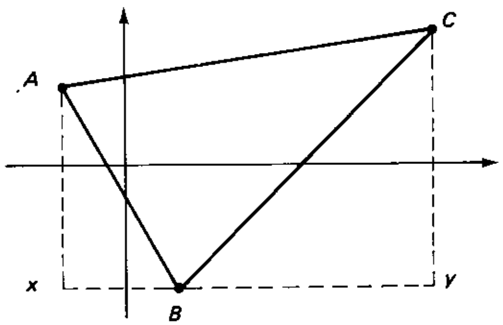
11. A derivada do determinante é a soma dos determinantes das matrizes obtidas da original, diferenciando as linhas, uma por uma.

15. *a*) F   *b*) V   *c*) V   *d*) F

17. *a*) 3
    b) 3
    c) Possível e indeterminado.
    d) As linhas de A como vetores são LD.

21. Considere as áreas do trapézio $AXYC$ e dos triângulos AXB e CYB.



23. *b*) A matriz-chave não tem inversa.

Leituras Sugeridas e Referências

[1]Herstein, T.N.; *Tópicos de Álgebra*, Editora Polígono, São Paulo, 1970.
[2]Hoffman, K. e Kunze, R.; *Álgebra Linear*, Editora Polígono, São Paulo, 1971.
[3]Lipschutz, S.; *Álgebra Linear*; McGraw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971.

4

ESPAÇO VETORIAL

4.1 VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

Imagine uma força atuando sobre um corpo. Você conseguirá precisá-la determinando sua intensidade e direção. Força é um exemplo típico de grandeza que será representada por um vetor. Outros exemplos são velocidade e deslocamento. Neste capítulo desenvolveremos o conceito de vetor de uma forma bem ampla, de modo que, por exemplo, soluções de sistemas de equações lineares ou de equações diferenciais também possam ser representadas por vetores.

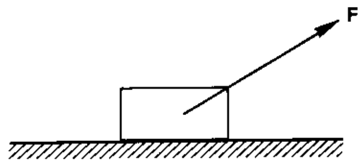


Figura 4.1.1

4.1.1 Vetores no Plano

Inicialmente, introduziremos a idéia de vetor, restringindo-nos ao plano. Para isto, consideremos o plano cartesiano que consiste de um sistema de coordenadas dado por um par de retas ortogonais, com orientação. Fixada uma unidade de comprimento, um ponto P do plano pode ser identificado com o par (a, b) de números reais, que são suas coordenadas.

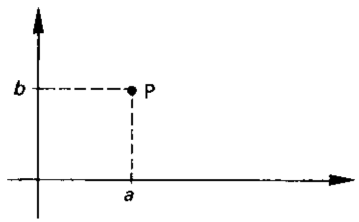


Figura 4.1.2

Dados dois pontos P e Q do plano, podemos considerar o segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$, com ponto inicial P e ponto final Q. Note que embora como conjunto de pontos os segmentos $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QP}$ sejam iguais, como segmentos orientados eles são distintos. Diremos que eles são segmentos opostos.

Vamos estabelecer que dois segmentos orientados são equivalentes se tiverem o mesmo comprimento e direção. Por exemplo, na figura

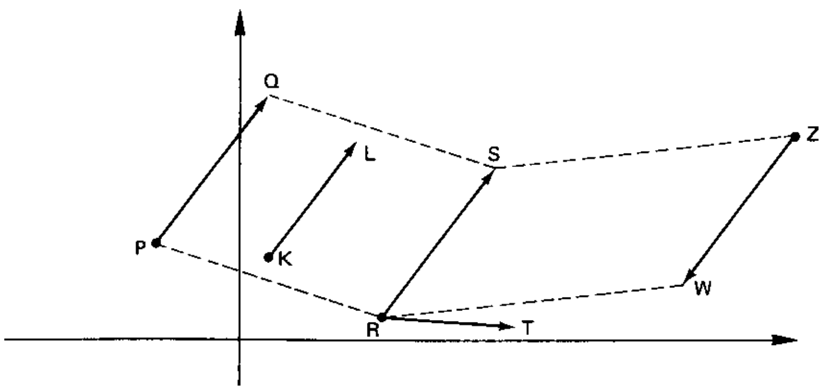


Figura 4.1.3

$\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{KL}$ e $\overrightarrow{RS}$ têm a mesma direção; $\overrightarrow{RT}$ e $\overrightarrow{KL}$ têm o mesmo comprimento; $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{ZW}$ têm o mesmo comprimento, mas os únicos segmentos com orientações equivalentes são $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$. Para qualquer segmento orientado no plano existe outro equivalente a este cujo ponto inicial é a origem. Por exemplo,

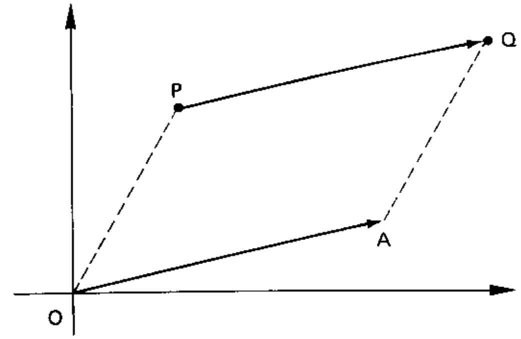


Figura 4.1.4

Vamos passar a considerar agora, apenas os segmentos orientados com ponto inicial na origem, denominados *vetores no plano*. É importante notar que vetores no plano são determinados exclusivamente pelo seu ponto final, pois o ponto inicial é fixo na origem. Assim, para cada ponto do plano $P(a, b)$, está associado um único vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ e, reciprocamente, dado um vetor, associamos um único ponto do plano, que é o seu ponto final. Isto é, a correspondência entre pontos do plano e vetores é biunívoca.

Usando esta correspondência entre vetores e pontos do plano, costumamos representar um vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ pelas coordenadas do seu ponto final $P(a, b)$. Usamos a notação da matriz-coluna $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, ou mesmo a identificação $\mathbf{v} = (a, b)$. Por exemplo, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{v} = (1, 3)$. Observe que, deste modo, à origem do plano ficará associado um vetor que tem os pontos inicial e final coincidentes com esta. Denominaremos tal vetor (que é só um ponto) de *vetor nulo*, e este será representado por $(0, 0)$.

O oposto de um vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ é o vetor $\mathbf{w} = \overrightarrow{OQ}$, que tem o mesmo comprimento e direção oposta. Em termos de coordenadas, se $\mathbf{v} = (a, b)$, então $\mathbf{w} = (-a, -b)$ e, por essa razão, denotamos $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$.

4.1.2 Operações com Vetores no Plano

a) Multiplicação de um vetor por um número.

Multiplicar um vetor $\mathbf{v}$ por um número $k > 0$ é considerar um novo vetor $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$, que possui a mesma direção de $\mathbf{v}$ e tem como comprimento k vezes o comprimento de $\mathbf{v}$. Se $k < 0$, o vetor $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ será igual ao oposto do vetor $|k| \cdot \mathbf{v}$. Se $k = 0$, $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ será o vetor nulo.

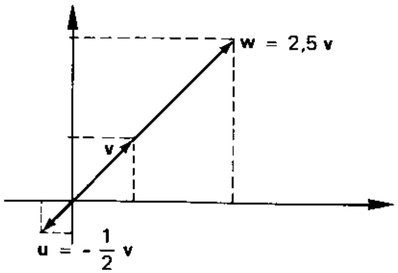


Figura 4.1.5

Observe que a multiplicação de vetor por um número corresponde à multiplicação da matriz-linha (ou coluna) por esse número. Assim, se $\mathbf{v} = (a, b)$ e $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$, então $\mathbf{w} = (ka, kb)$. Por exemplo, para $\mathbf{v} = (2, -5)$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{v} = (6, -15)$.

b) Adição de dois vetores.

Para introduzir a soma de vetores, vamos voltar ao exemplo de forças atuando num corpo. Uma força que atua num ponto pode ser representada por um vetor, de comprimento igual à intensidade da força, com a mesma direção em que a força atua. (Estamos supondo que a origem do sistema de coordenadas está no ponto onde a força atua.)

Suponhamos agora que temos duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ atuando no mesmo objeto. Podemos representar o resultado destas duas forças por uma única força **R**? Em outras palavras, o que é a "soma" de duas forças?

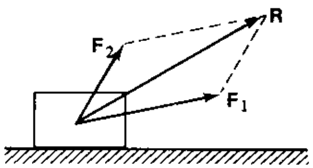


Figura 4.1.6

A experiência mostra que a força resultante é representada pelo vetor diagonal do paralelogramo construído a partir dos vetores $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$. Chamamos a força resultante de soma de $\mathbf{F}_1$ com $\mathbf{F}_2$ e denotamos $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Agora, pensemos em termos de coordenadas. Se $\mathbf{F}_1 = (a, b)$ e $\mathbf{F}_2 = (c, d)$, quais são as coordenadas de **R**?

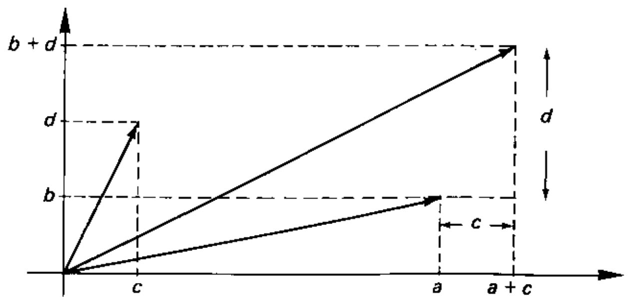


Figura 4.1.7

Usando congruência de triângulos, você pode notar que as coordenadas de **R** são $(a + c, b + d)$.

Foram resultados como este que motivaram a definição formal de soma de dois vetores no plano. Se $\mathbf{v} = (a, b)$ e $\mathbf{w} = (c, d)$, então o vetor-soma será $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a + c, b + d)$. Observe que somar vetores corresponde simplesmente a somar as matrizes que os representam. As operações entre vetores herdam, portanto, todas as propriedades das operações correspondentes para matrizes.

Podemos ainda observar que a soma de um vetor $\mathbf{v} = (a, b)$ com seu **oposto** $\mathbf{w} = -\mathbf{v} = (-a, -b)$ **é o valor nulo. Isto é,** $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (a - a, b - b) = (0, 0)$.

Por diferença entre dois vetores v e w, entendemos a soma do primeiro com o oposto do segundo vetor, $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$. Isto é mostrado geometricamente, pela Figura 4.1.1.

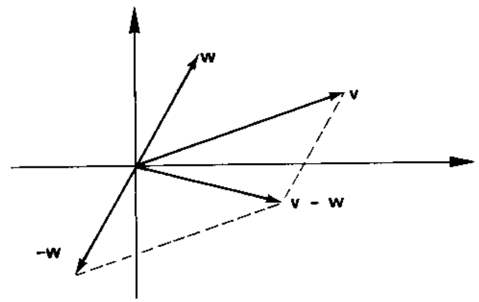


Figura 4.1.8

4.1.3 Vetores no Espaço

Da mesma forma que fizemos no plano, podemos considerar vetores no espaço. Teremos então um sistema de coordenadas dado por três retas orientadas, perpendiculares duas a duas, e, uma vez fixada uma unidade de comprimento, cada ponto P do espaço estará identificado com a terna de número reais (x, y, z), que dá suas coordenadas.

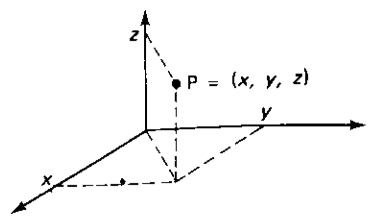


Figura 4.1.9

Também aqui os vetores são dados por segmentos orientados, com ponto inicial na origem, e existe uma correspondência biunívoca entre vetores e pontos do espaço que a cada vetor $\vec{OP}$ associa seu ponto final $P = (a, b, c)$. Deste modo, o vetor $\mathbf{v} = \vec{OP}$ costuma ser denotado pelas coordenadas de P.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = (a, b, c)$$

Exemplo

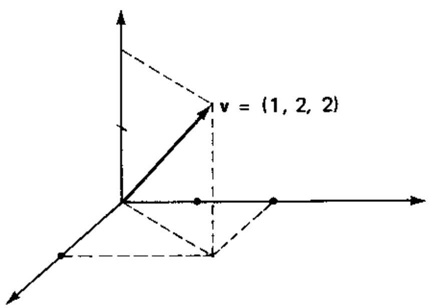


Figura 4.1.10

A origem fixada para o espaço representará o vetor nulo (0, 0, 0).

Assim, se chamarmos de V o conjunto de vetores no espaço, podemos identificar

$$V = \{(x_1, x_2, x_3);\ \ x_i \in \mathbf{R}\}$$
$$= \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$$

4.1.4 Operações com Vetores no Espaço

A soma de dois vetores e o produto de um vetor por um número (escalar) também são definidos da mesma forma que no plano

Se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$\text{e} \quad k\mathbf{u} = (kx_1, kx_2, kx_3)$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (2, -3, 5)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, -1, 5)$ e $2\mathbf{u} = (4, -6, 10)$.

Como já observamos no caso do plano, estas operações correspondem exatamente às respectivas operações das matrizes-linha que representam os vetores e gozam de uma série de propriedades decorrentes daquelas relativas às operações com números reais.

Propriedades:

i) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

iii) Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. ($\mathbf{0}$ é chamado vetor nulo.)

iv) Existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

v) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

vi) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

vii) $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$

viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Estas propriedades servirão para caracterizar certos conjuntos que, apesar de terem natureza diferente dos vetores no espaço, "comportam-se" como eles. Estes conjuntos receberão o nome de *espaços vetoriais*.

4.2 ESPAÇOS VETORIAIS

4.2.1 Definição: Um *espaço vetorial real* é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \xrightarrow{+} V$, e multiplicação por escalar, $\mathbf{R} \times V \xrightarrow{\cdot} V$, tais que, para quaisquer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$ e a, $b \in \mathbf{R}$, as propriedades de *i*) a *viii*) sejam satisfeitas.

Se na definição acima, ao invés de termos como escalares, números reais, tivermos números complexos, V será um *espaço vetorial complexo.*

Usaremos doravante a palavra *vetor* para designar um elemento de um espaço vetorial. Assim, por exemplo, se considerarmos o espaço vetorial $V = M(2, 2)$, os vetores serão matrizes. (Mostre que $M(2, 2)$ realmente é um espaço vetorial, verificando as condições indicadas na definição 4.2.1. Lembre que os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ deste espaço vetorial são matrizes 2×2 e os escalares ainda números reais.) Agora, convém introduzir alguns exemplos de espaços vetoriais.

4.2.2 Exemplos

Exemplo 1: O conjunto dos vetores do espaço

$$V = \mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3);\ \ x_i \in \mathbf{R}\}$$

é evidentemente um espaço vetorial real (veja 4.1.3).

Exemplo 2: No lugar de ternas de números reais consideremos como vetores n-uplas de números reais.

$$V = \mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); \; x_i \in \mathbf{R}\}$$

e se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ e $a \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \quad \text{e} \quad a\mathbf{u} = (ax_1, ax_2, ..., ax_n)$$

Neste caso perdemos, é claro, a visão geométrica de "vetores", pois saímos de um espaço de "dimensão" 3 da geometria e passamos a um espaço de "dimensão" n. Apesar disto, podemos trabalhar com estes espaços da mesma maneira que em $\mathbf{R}^3$.

Subexemplo: $n = 5$; $V = \mathbf{R}^5$

$$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): \; x_i \in \mathbf{R}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Se} \quad \mathbf{u} &= (1, 0, 2, -3, 4) \\ \text{e} \quad \mathbf{v} &= (0, 1, 1, -2, 5), \\ \text{então } \mathbf{u} - 2\mathbf{v} &= (1, 0, 2, -3, 4) - 2(0, 1, 1, -2, 5) \\ &= (1, 0, 2, -3, 4) - (0, 2, 2, -4, 10) \\ &= (1, -2, 0, 1, -6) \end{aligned}$$

Observe que, neste caso, o vetor nulo é $(0, 0, 0, 0, 0)$.

As n-uplas de números reais ou, equivalentemente, matrizes-linha $1 \times n$ (ou matrizes-coluna $n \times 1$) aparecem naturalmente na descrição de muitos problemas que envolvem várias variáveis. Como um exemplo para determinar a posição de uma barra no espaço precisamos dar as coordenadas de suas duas extremidades $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Assim, sua coordenada será dada por $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, e estaremos trabalhando com o espaço vetorial $\mathbf{R}^6$.

Exemplo 3: $V = M(m, n)$, o conjunto das matrizes reais $m \times n$ com a soma e produto por escalar usuais.

Subexemplos:

i) $V = M(2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$

Qual é o vetor nulo deste espaço vetorial? (Veja o Exercício 1 da secção **4.8.**)

ii) $V = M(1, n) = \{[a_{11} \; a_{12} \; ... \; a_{1n}]: a_{1i} \in \mathbf{R}\}$.

Observe que este espaço vetorial pode ser identificado com $V = \mathbf{R}^n$ (veja o Exemplo 2 desta seção).

Exemplo 4: $V = P_n$, o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n (incluindo o zero). As operações são soma de polinômios e multiplicação destes por números reais.

Subexemplo: $n = 2$

$P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2: \; a_i \in \mathbf{R}\}$.

Todos os exemplos anteriores foram de espaços vetoriais reais. O próximo exemplo é de um espaço vetorial complexo.

Exemplo 5: V é o conjunto das matrizes 2×2, cujos elementos são números complexos. As operações são adição de matrizes e multiplicação destas por números complexos.

Exemplificando:

$$\begin{bmatrix} 7 + i & 0 \\ 2 & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 + i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 + i & 0 \\ 4 + i & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1 + i) \begin{bmatrix} i & 2 \\ 1 - i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i - 1 & 2 + 2i \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Os espaços complexos aparecem, por exemplo, no estudo de sistemas de equações diferenciais. (Veja o Capítulo 12.) Salvo menção em contrário, todos os espaços vetoriais que abordaremos a seguir serão espaços vetoriais reais.

4.3 SUBESPAÇOS VETORIAIS

Às vezes, é necessário detectar, dentro de um espaço vetorial V, subconjuntos W que sejam eles próprios espaços vetoriais "menores". Tais conjuntos serão chamados *subespaços de V*. Isto acontece, por exemplo, em: $V = \mathbf{R}^2$, o plano, onde W é uma reta deste plano, que passa pela origem.

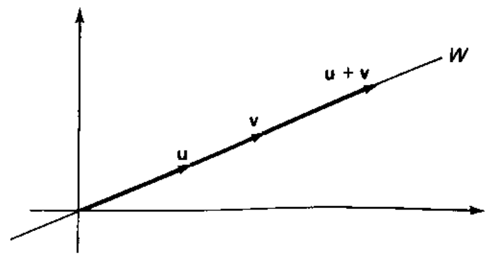


Figura 4.3.1

Veja que a reta W funciona sozinha como espaço vetorial pois, ao somarmos dois vetores de W, obtemos um outro vetor em W. Da mesma forma, se multiplicarmos um vetor de W por um número, o vetor resultante ainda estará em W. Isto é, o subconjunto W é "fechado" em relação à soma de vetores e à multiplicação destes por escalar. Estas são as condições exigidas para que um subconjunto W de um espaço vetorial V seja um subespaço.

4.3.1 Definição: Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um *subespaço vetorial* de V se:

i) Para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ tivermos $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.
ii) Para quaisquer $a \in \mathbf{R}$, $\mathbf{u} \in W$ tivermos $a\mathbf{u} \in W$.

Podemos fazer três observações:

a) As condições da definição acima garantem que ao operarmos em W (soma e multiplicação por escalar), não obteremos um vetor fora de W. Isto é suficiente para afimar que W é ele próprio um espaço vetorial, pois assim as operações ficam bem definidas e, além disso, não precisamos verificar as propriedades de (*i*) a (*viii*) de espaço vetorial, porque elas são válidas em V, que contém W.
b) Qualquer subespaço W de V precisa necessariamente conter o vetor nulo (por causa da condição (*ii*) quando $a = 0$).
c) Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços (que são chamados subespaços triviais), o conjunto formado somente pelo vetor nulo (verifique (*i*) e (*ii*)) e o próprio espaço vetorial.

4.3.2 Exemplos

Exemplo 1: $V = \mathbf{R}^3$ e $W \subset V$, um plano passando pela origem.

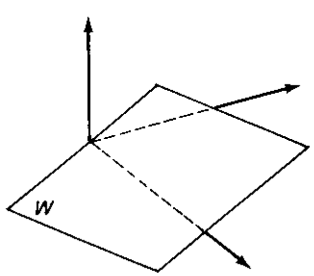


Figura 4.3.2

Veja geometricamente a validade de (*i*) e (*ii*).. Observe que se W não passasse pela origem, não seria um subespaço. Note que na verdade os únicos subespaços de $\mathbf{R}^3$ são a origem, as retas e planos que passam pela origem, e o próprio $\mathbf{R}^3$.

Exemplo 2: $V = \mathbf{R}^5$ e $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5);\ x_i \in \mathbf{R}\}$
Isto é, W é o conjunto dos vetores de $\mathbf{R}^5$, cuja primeira coordenada é nula. Verifiquemos as condições (*i*) e (*ii*).

i) $\mathbf{u} = (0, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\mathbf{v} = (0, y_2, y_3, y_4, y_5) \in W$
Então $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5)$ que ainda pertence a W, pois tem a primeira coordenada nula.
ii) $k\mathbf{u} = (0, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5) \in W$, pois a primeira coordenada é nula para todo $k \in \mathbf{R}$.

Portanto, W é um subespaço vetorial de $\mathbf{R}^5$.

Exemplo 3: $V = M(n, n)$ e W é o subconjunto das matrizes triangulares superiores. W é subespaço, pois a soma de matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior, assim como o produto de uma matriz triangular superior por um escalar.

Exemplo 4: Uma situação importante em que aparece um subespaço é obtida ao resolvermos um sistema linear homogêneo. Por exemplo

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Observe que, se colocarmos este sistema na forma matricial, teremos

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desta forma, estamos procurando, dentro do espaço vetorial $M(3, 1)$ das matrizes-coluna de 3 linhas, aqueles vetores que satisfazem a relação (*), isto é, aqueles vetores-solução do sistema. Queremos saber se o conjunto dos vetores-solução é um subespaço de $M(3, 1)$. Para isto, teremos que tomar dois vetores-solução.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \text{ e verificar se sua soma } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

ainda é um vetor-solução. Então

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é, a soma é solução. Além disso, se multiplicarmos $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ por uma constante k, teremos

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = k \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é, o produto de uma constante por uma solução ainda é uma solução. Portanto, o conjunto W dos vetores-solução de (*) é um subespaço de $M(3, 1)$. (Considerando a identificação $M = (3, 1)$, como $\mathbf{R}^3$, W pode ser dado geometricamente pela intersecção dos três planos no espaço descritos por cada uma das equações de (*).)

Exemplo 5: O conjunto-solução de um sistema linear homogêneo de n incógnitas é um subespaço vetorial de $M(n, 1)$. Tente provar isto.

Alguns exemplos em que W *não* é subespaço de V são os seguintes:

Exemplo 6: $V = \mathbf{R}^2$, onde W é uma reta deste plano que não passa pela origem.

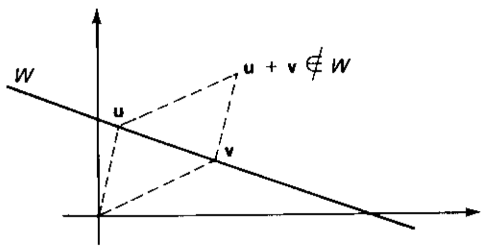


Figura 4.3.3

W não é subespaço de V, pois existem $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em W, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \notin W$. Outra maneira de ver que W não é subespaço de V é notar que o vetor nulo não pertence a W. (Veja a observação b em 4.3.1.)

Este último fato é usado freqüentemente para determinarmos que $U \subset V$ não é subespaço de V, isto é, sempre que $\mathbf{0} \notin U$, podemos afirmar que *U não é subespaço de V*. Mas, cuidado: Não vale a recíproca, pois podemos ter $\mathbf{0} \in U$ sem que U seja subespaço, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 7: $V = \mathbf{R}^2$ e $W = \{(x, x^2);\ x \in \mathbf{R}\}$. Se escolhermos $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (2, 4)$, temos $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 5) \notin W$. Assim, W não é subespaço vetorial de V pois, caso contrário, a condição (i) deveria ser satisfeita para quaisquer $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in$ $\in W$, e isto não ocorre neste exemplo.

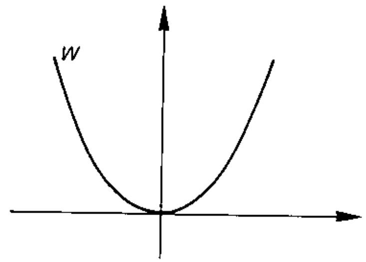


Figura 4.3.4

Exemplo 8: $V = M(n, n)$ e W é o subconjunto de todas as matrizes em que $a_{11} \leqslant 0$. Mostre que a condição (i) é satisfeita, mas (ii) não é; portanto, W não é um subespaço.

Exemplo 9: Se um sistema linear não for homogêneo, o que acontece com seu conjunto-solução? Considere o exemplo:

$$(*) \begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Prove que a soma de dois vetores-solução nem sempre é um vetor-solução, e assim o conjunto-solução *não é um subespaço* de $M(3, 1)$. (Veja o Exercício 17 da secção 4.8.)

Embora nos Exemplos 6 e 9, W não seja subespaço, ainda assim ele é um subconjunto especial que recebe o nome de *variedade linear*. Estudaremos melhor este tipo de subconjunto em 4.9. O Exemplo 7 não é uma variedade linear. Agora veremos as principais propriedades dos subespaços.

4.3.3 Teorema: (Intersecção de subespaços): Dados W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V, a intersecção $W_1 \cap W_2$ ainda é um subespaço de V.
Prova: Observamos inicialmente que $W_1 \cap W_2$ nunca é vazio pois ambos os subespaços contêm o vetor nulo de V. É necessário verificar então as condições *i*) e *ii*) para mostrar que $W_1 \cap W_2$ também é subespaço vetorial de V.

i) Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertencem a W_1, e também a W_2. Então, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_1$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_2$, sendo W_1 e W_2 subespaços de V. Portanto, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$.

ii) Agora, você deverá provar a segunda condição como um exercício.

4.3.4 Exemplos

Exemplo 1: $V = \mathbf{R}^3$

$W_1 \cap W_2$ é a reta de interseção dos planos W_1 e W_2.

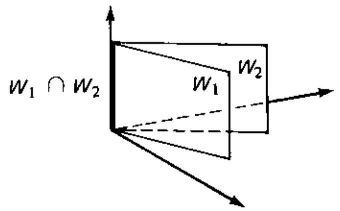


Figura 4.3.5

Exemplo 2: $V = M(n, n)$

$W_1 = \{\text{matrizes triangulares superiores}\}$

$W_2 = \{\text{matrizes triangulares inferiores}\}$

Então $W_1 \cap W_2 = \{\text{matrizes diagonais}\}$.

Uma vez que a interseção de dois subespaços ainda é um subespaço vetorial, poderíamos esperar o mesmo da reunião. Mas isto não acontece, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 3: $V = \mathbf{R}^3$

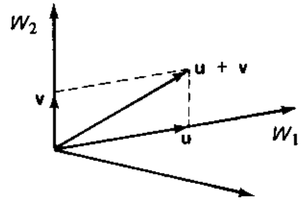


Figura 4.3.6

W_1 e W_2 são retas que passam pela origem. Então, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ e $W_1 \cup W_2$ é o "feixe" formado pelas duas retas, que não é subespaço vetorial de $\mathbf{R}^3$. De fato, se somarmos os dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, pertencentes a $W_1 \cup W_2$, vemos que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está no plano que contém W_1 e W_2 mas $\mathbf{u} + \mathbf{v} \notin W_1 \cup W_2$.

Assim, $W_1 \cup W_2$ não é subespaço de V. Entretanto, podemos construir um conjunto W, que contém W_1 e W_2 e é subespaço de V. W será formado por todos os vetores de V que forem a soma de vetores de W_1 com vetores de W_2. $W = W_1 + W_2$ será chamado "soma de W_1 e W_2". Será conveniente colocarmos esta afirmação de forma mais precisa.

4.3.5 Teorema: (Soma de subespaços): Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Então, o conjunto

$W_1 + W_2 = \{\mathbf{v} \in V; \mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ e } \mathbf{w}_2 \in W_2\}$ é subespaço de V.
Prova: (Veja o Exercício 23 da secção 4.8.)

4.3.6 Exemplos

Exemplo 4: No exemplo anterior, $W = W_1 + W_2$ é o plano que contém as duas retas.

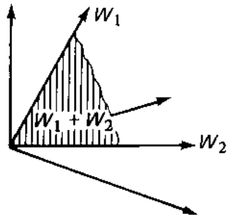


Figura 4.3.7

Exemplo 5: Se $W_1 \subset \mathbf{R}^3$ é um plano e W_2 é uma reta contida neste plano, ambos passando pela origem, $W_1 + W_2 = W_1$.

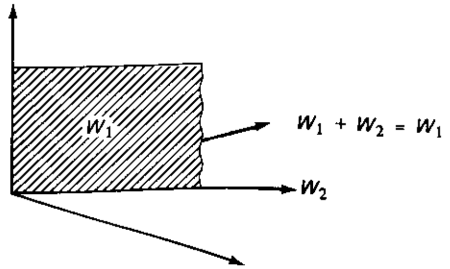


Figura 4.3.8

Exemplo 6: $W_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ e $W_2 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}\right\}$, onde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

Então $W_1 + W_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\} = M(2, 2)$.

Quando $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado *soma direta* de W_1 com W_2, denotado por $W_1 \oplus W_2$. Os Exemplos 4 e 6 são exemplos de soma direta, e um contra-exemplo é dado no Exemplo 5. Observe que tanto no Exemplo 1, como no 2, temos que o espaço todo $V = W_1 + W_2$, mas a soma não é direta.

4.4 COMBINAÇÃO LINEAR

Vamos comentar, agora, uma das características mais importantes de um espaço vetorial, que é a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados.

4.4.1 Definição: Sejam V um espaço vetorial real (ou complexo), $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in V$ e $a_1, ..., a_n$ números reais (ou complexos). Então, o vetor

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$$

é um elemento de V ao que chamamos *combinação linear* de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

Uma vez fixados vetores $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes, é um subespaço vetorial. (Mostre isto como exercício.) W é chamado *subespaço gerado por* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ e usamos a notação

$$W = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n]$$

Note que, formalmente, podemos escrever

$$W = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n] = \{\mathbf{v} \in V;\ \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n,\ a_i \in \mathbf{R},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Uma outra caracterização de subespaço gerado é a seguinte: $W = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n]$ é o menor subespaço de V que contém o conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$, no sentido de que qualquer outro subespaço W' de V que contenha $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ satisfará $W' \supset W$. (Mostre também esta afirmação como exercício.)

4.4.2 Exemplos

Exemplo 1: $V = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Então $[\mathbf{v}] = \{a\mathbf{v}: a \in \mathbf{R}\}$, isto é, $[\mathbf{v}]$ é a reta que contém o vetor $\mathbf{v}$.

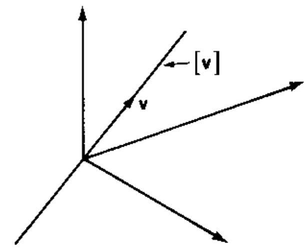


Figura 4.4.1

Exemplo 2: Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3$ são tais que $\alpha\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, então $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ será o plano que passa pela origem e contém $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

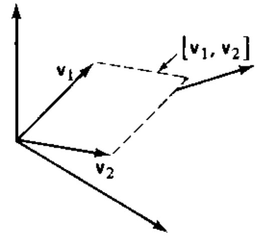


Figura 4.4.2

Observe que se $\mathbf{v}_3 \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, então $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, pois todo vetor que

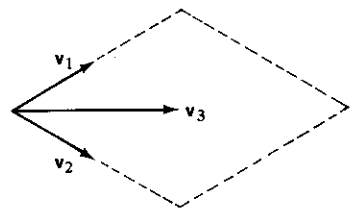


Figura 4.4.3

pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ é uma combinação linear apenas de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ (pois $\mathbf{v}_3$ é combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$).

Exemplo 3: $V = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$. Logo $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ pois, dado $\mathbf{v} = (x, y) \in V$, temos $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, ou seja, $\mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2$.

Exemplo 4:

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Então $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbf{R}\right\}$

4.5 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Em Álgebra Linear, é fundamental sabermos se um vetor é uma combinação linear de outros. No Exemplo 2 da seção anterior, o espaço gerado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ é o mesmo que o espaço gerado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. A razão disso é que $\mathbf{v}_3$ é um vetor "supérfluo" para descrever o subespaço, pois é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. No caso geral, dados os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, queremos saber se não existem vetores "supérfluos", isto é, se algum desses vetores não é uma combinação linear dos outros. Para chegarmos a uma conclusão, precisamos começar definindo dependência e independência linear.

4.5.1 Definição: Sejam V um espaço vetorial e $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ é *linearmente independente* (LI), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ são LI, se a equação

$$a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

implica que $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ são LD.

Vetores linearmente dependentes podem ser caracterizados de uma outra maneira.

4.5.2 Teorema: $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ é LD se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

Prova:
Sejam $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ LD e

$$a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_j\mathbf{v}_j + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Segundo a definição dada, um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que $a_j \neq 0$. Então

$$\mathbf{v}_j = -\frac{1}{a_j}(a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + ... + a_n\mathbf{v}_n)$$

e portanto

$$\mathbf{v}_j = -\frac{a_1}{a_j}\mathbf{v}_1 + ... - \frac{a_n}{a_j}\mathbf{v}_n$$

Logo, $\mathbf{v}_j$ é uma combinação linear dos outros vetores.
Por outro lado, se tivermos $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_j, ..., \mathbf{v}_n\}$ tal que para algum j,

$$\mathbf{v}_j = b_1\mathbf{v}_1 + ... + b_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + b_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + ... - b_n\mathbf{v}_n$$

temos

$$b_1\mathbf{v}_1 + ... - 1\mathbf{v}_j + ... + b_n v_n = \mathbf{0} \quad \text{com} \quad b_j = -1 \quad \text{e,}$$

portanto, $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ é LD.

Esta proposição também é equivalente a: Um conjunto de vetores é LI se, e somente se nenhum deles for uma combinação linear dos outros.

4.5.3 Exemplos

Exemplo 1: $V = \mathbf{R}^3$. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.
$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é LD se e somente se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ estiverem na mesma reta, que passa pela origem. ($\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2$). Veja a Figura 4.5.1.

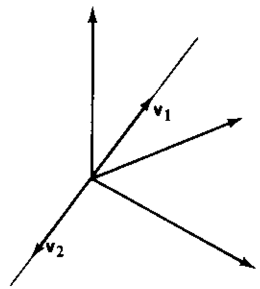


Figura 4.5.1

Exemplo 2: $V = \mathbf{R}^3$. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$.
$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é LD se estes três vetores estiverem no mesmo plano, que passa pela origem. Veja a Figura 4.5.2.

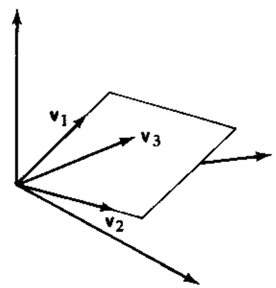


Figura 4.5.2

Exemplo 3: $V = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.
$\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são LI, pois

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$$
$$a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = (0, 0)$$
$$(a_1, a_2) = (0, 0)$$
$$a_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2 = 0$$

Exemplo 4: De modo análogo, vemos que para $V = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Então $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ são LI.

Exemplo 5: $V = \mathbf{R}^2$
$\{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ é LD, pois $\frac{1}{2}(1, -1) - 1(1, 0) + \frac{1}{2}(1, 1) = (0, 0)$.

4.6 BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Agora, estamos interessados em encontrar, dentro de um espaço vetorial V, um conjunto finito de vetores, tais que qualquer outro vetor de V seja uma combinação linear deles. Em outras palavras, queremos determinar um conjunto de vetores que gere V e tal que todos os elementos sejam realmente necessários para gerar V. Se pudermos encontrar tais vetores, teremos os alicerces de nosso espaço, com estes vetores fazendo o mesmo papel que **i**, **j**, **k** na Geometria Analítica no espaço. Denominaremos um conjunto de vetores desse tipo de base.

4.6.1 Definição: Um conjunto $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ de vetores de V será uma *base* de V se:

i) $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ é LI
ii) $[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n] = V$

4.6.2 Exemplos

Exemplo 1: $V = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$
$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *é base* de V, conhecida como base canônica de $\mathbf{R}^2$. (Veja o Exemplo 3 da seção 4.4.2 e o Exemplo 3 da seção 4.5.3.)

O conjunto $\{(1, 1), (0, 1)\}$ também *é uma base* de $V = \mathbf{R}^2$. De fato:
Se $(0, 0) = a(1, 1) + b(0, 1) = (a, a + b)$, então $a = b = 0$. Isto é, $\{(1, 1), (0, 1)\}$ é LI.
Ainda $[(1, 1), (0, 1)] = V$ pois dado $\mathbf{v} = (x, y) \in V$, temos

$$(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$$

ou seja, todo vetor de $\mathbf{R}^2$ é uma combinação linear dos vetores $(1, 1)$ e $(0, 1)$. Veja a Figura 4.6.1.

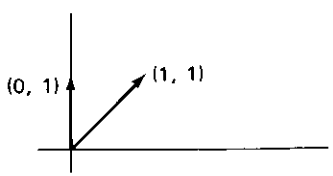


Figura 4.6.1

Exemplo 2:
$\{(0, 1), (0, 2)\}$ *não é base* de $\mathbf{R}^2$, pois é um conjunto LD.
Se $(0, 0) = a(0, 1) + b(0, 2)$, temos $a = -2b$ e a e b não são necessariamente zero. Veja a Figura 4.6.2.

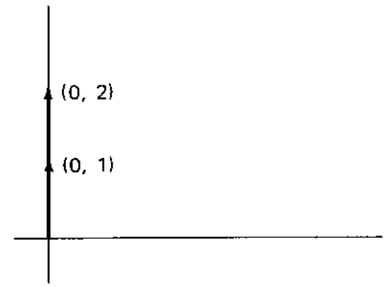


Figura 4.6.2

Exemplo 3: $V = \mathbf{R}^3$
$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *é uma base* de $\mathbf{R}^3$. Esta é a base canônica de $\mathbf{R}^3$. Podemos mostrar que

i) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é LI e
ii) $(x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$

Exemplo 4:
$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ *não é base* de $\mathbf{R}^3$. É LI, mas não gera todo $\mathbf{R}^3$, isto é, $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)] \neq \mathbf{R}^3$.

Exemplo 5: $V = M(2, 2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ *é uma base* de V.

(Veja o Exercício 9 da secção 4.8.)

Existem espaços que não têm base finita. Isto acontece principalmente quando trabalhamos com espaços de funções. Nestes casos, precisaremos de um conjunto infinito de vetores para gerar o espaço. Isto não quer dizer que estamos trabalhando com combinações lineares infinitas, mas sim, que cada vetor do espaço é uma combinação linear finita daquela "base infinita". Ou seja, para cada vetor, podemos escolher uma quantidade finita de vetores da "base" para, com eles, escrever o vetor dado (veja o Exercício 16 da secção 4.8.). Neste texto, consideraremos sempre espaços vetoriais que tenham uma base finita.

Para obter propriedades acerca das bases de um espaço, consideremos as proposições seguintes.

4.6.3 Teorema: Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.

Prova: Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes, então eles cumprem as condições para uma base, e não temos mais nada a fazer. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes, então existe uma combinação linear deles, com algum coeficiente não zero, dando o vetor nulo

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + ... + x_n\mathbf{v}_n = 0$$

Seja, por exemplo, $x_n \neq 0$. Então podemos escrever

$$\mathbf{v}_n = \frac{-x_1}{x_n}\mathbf{v}_1 + \frac{-x_2}{x_n}\mathbf{v}_2 + ... + \frac{-x_{n-1}}{x_n}\mathbf{v}_{n-1}$$

ou seja, $\mathbf{v}_n$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}$ e, portanto, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{n-1}$ ainda geram V. Se $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}$ for LD, então existe uma combinação linear deles dando o vetor nulo e com algum coeficiente diferente de zero; portanto, poderemos extrair aquele vetor que corresponde a este coeficiente. Seguindo desta forma, após uma quantidade finita de estágios, chegaremos a um subconjunto de $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$, formado por $r (r \leqslant n)$ vetores LI $\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, ..., \mathbf{v}_{ir}$, que ainda geram V, ou seja, formaremos uma base.

4.6.4 Teorema: Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).

Prova: Como $[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n] = V$, pela proposição anterior, podemos extrair uma base para V de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$. Seja $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$, $r \leqslant n$, esta base (para não complicar a notação). Consideremos agora $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_m$, m vetores de V, com $m > n$. Existem, então, constantes a_{ij}, tais que

$$(1) \quad \begin{array}{l} \mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + ... + a_{1r}\mathbf{v}_r \\ \mathbf{w}_2 = a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + ... + a_{2r}\mathbf{v}_r \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \\ \mathbf{w}_m = a_{m1}\mathbf{v}_1 + a_{m2}\mathbf{v}_2 + ... + a_{mr}\mathbf{v}_r \end{array}$$

Consideremos agora uma combinação linear de $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$, dando zero.

$$(2) \quad \mathbf{0} = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + ... + x_m\mathbf{w}_m$$

Substituindo as relações (1) em (2) e coletando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = &(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m)\mathbf{v}_1 + \\ &+ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m)\mathbf{v}_2 + ... \\ &+ (a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + ... + a_{mr}x_m)\mathbf{v}_r. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ são LI, então

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m = 0 \\ \quad\ddots \\ a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + ... + a_{mr}x_r = 0 \end{cases}$$

Temos então um sistema linear homogêneo com r equações e m incógnitas $x_1, ..., x_m$ e, como $r \leqslant n < m$, ele admite uma solução não trivial, ou seja, existe uma solução com algum x_i não nulo. Portanto $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$ são LD.

4.6.5 Corolário: Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado *dimensão de V*, e denotado *dim V*.

Prova: Sejam $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ e $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m\}$ duas base de V. Como $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ geram V e $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$ são LI, pela proposição anterior, $m \leqslant n$.

Por outro lado, como $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$ geram V e $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ são LI, ainda pelo teorema anterior, $n \leqslant m$. Portanto, $n = m$.

4.6.6 Exemplos

Exemplo 1: $V = \mathbf{R}^2$
$\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 1), (0, 1)\}$ são bases de V. Então dim $V = 2$.

Exemplo 2: dim $\mathbf{R}^3 = 3$.

Exemplo 3: $V = M(2, 2)$.
Como vimos no Exemplo 5 da seção 4.6.2, uma base tem 4 elementos. Então dim $V = 4$.

Quando um espaço vetorial V admite uma base finita, dizemos que V é um espaço vetorial de dimensão finita.

4.6.7 Teorema: Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.

Prova: Seja dim $V = n$ e $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ vetores LI. (Observe que, pelo teorema 4.6.4, $r \leqslant n$.) Se $[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r] = V$, então $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r\}$ forma uma base, e não temos mais nada a fazer (neste caso, $n = r$).

Se existe $\mathbf{v}_{r+1} \in V$ tal que $\mathbf{v}_{r+1} \notin [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r]$, isto é, $\mathbf{v}_{r+1}$ não é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}\}$ é LI (prove isto!). Se $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}] = V$, então $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{r+1}\}$ é a base procurada. Caso contrário, existe $\mathbf{v}_{r+2} \notin [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{r+1}]$ e, então, $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}\}$ é LI (prove isto!). Se $[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}]$ nossa prova está concluída. Se não, prosseguimos usando o mesmo argumento. Como não podemos ter mais do que n vetores LI em V (veja o teorema 4.6.4), após um número finito de passos teremos obtido uma base de V que contém os vetores dados.

Um corolário muito aplicado desta proposição é

4.6.8 Corolário: Se $\dim V = n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V.

Prova: Se não formasse uma base, poderíamos completar o conjunto até formá-la e dessa forma teríamos uma base com mais do que n vetores em V, o que é absurdo (veja 4.6.5).

Por exemplo, se você souber que a $\dim V = 2$, e encontrar um conjunto de dois vetores LI, você pode afirmar que ele é uma base e portanto gera V.

Uma proposição que relaciona as dimensões de subespaços de um espaço vetorial é dada a seguir.

4.6.9 Teorema: Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $\dim U \leqslant \dim V$ e $\dim W \leqslant \dim V$. Além disso,

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

A demonstração desta proposição é feita tomando-se bases para U e W, juntando-as, obtendo um conjunto de vetores que gera $U + W$ e depois estudando quantos são necessários extrair para se obter uma base para $U + W$. Deixamos você fazer esta prova, recomendando que resolva primeiro os problemas 27 e 28 da secção 4.8. É um bom exercício !

O resultado a seguir nos permitirá falar em coordenadas de um vetor.

4.6.10 Teorema: Dada uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$.

Prova: De fato $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$ pois $[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n] = V$, e como, $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ é LI, os $a_1, ..., a_n$ são univocamente determinados. (Verifique!) Estamos supondo aqui que foi fixada uma ordem para os elementos da base.

4.6.11 Definição: Sejam $\beta = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ base de V e $\mathbf{v} \in V$ onde $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$. Chamamos estes números $a_1, ..., a_n$ de *coordenadas* de $\mathbf{v}$ em relação à base β e denotamos por

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplo: $V = \mathbf{R}^2$

$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$

$(4, 3) = 4(1, 0) + 3(0, 1)$.

Portanto $[(4, 3)]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Se $\beta' = \{(1, 1), (0, 1)\}$, então $(4, 3) = x(1, 1) + y(0, 1)$, resultando $x = 4$ e $y = -1$.

Então $(4, 3) = 4(1, 1) - 1(0, 1)$, donde $[(4, 3)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Observação: É importante notar que a ordem dos elementos de uma base também influi na matriz das coordenadas de um vetor em relação a esta base. Por exemplo, se tivermos:

$$\beta_1 = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \text{e} \quad \beta_2 = \{(0, 1), (1, 0)\},$$

então

$$[(4, 3)]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{mas} \quad [(4, 3)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Em virtude disto, doravante, ao considerarmos uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$, estaremos sempre subentendendo que a base seja ordenada, isto é, que os vetores estão ordenados na ordem em que aparecem. Outras situações onde a ordem dos vetores é de suma importância são apresentados em 4.7 e nos Capítulos 5 e 10.

4.6.12 Exemplo

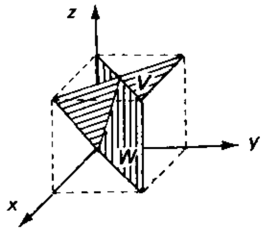
Considere:

$V = \{(x, y, z) \,;\, x + y - z = 0\}$

$W = \{(x, y, z) \,;\, x = y\}$.

Determine $V + W$.

Observe que



$V = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$
$W = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

Então

$V + W = [(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

(Veja 4.6.9.)

Como, dado $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ podemos escrever

$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 1, 0) + \delta(0, 0, 1)$

Com

$\alpha = x$
$\beta = y$
$\gamma = 0$
$\delta = z - x - y$

Observe que a solução deste sistema não é única uma vez que 4 vetores no $\mathbf{R}^3$ é necessariamente LD.

Portanto $V + W = \mathbf{R}^3$.

Usando 4.6.9,

$\dim \mathbf{R}^3 = \dim V + \dim W - \dim (V \cap W)$

temos que $\dim (V \cap W) = 1$

Vamos determinar $V \cap W$.

$$\begin{aligned} V \cap W &= \{(x, y, z)\ ; x + y - z = 0 \text{ e } x = y\} \\ &= \{(x, y, z)\ ; x = y = z/2\} \\ &= [(1, 1, 1/2)] \end{aligned}$$

(Confira com o Exercício 25.)

Para concluir esta secção gostaríamos de recomendar mais fortemente alguns exercícios. Os espaços vetoriais mais usados na prática são os $\mathbf{R}^n$ e seus subespaços e, por isso, é bom saber obter suas bases de modo rápido: Um processo para tal fim é delineado nos Exercícios 17 e 18 da secção 4.8.

Volte ao Exemplo 4 da seção 4.3.2. Se quisermos explicitar o espaço-solução, teremos que resolver o sistema. Fazendo isto, verificamos que o espaço-solução é o espaço gerado por

$$\begin{bmatrix} \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, é um subespaço de dimensão 1. Observe ainda que o grau de liberdade do sistema é 1. Faça o Exercício 21b e c da secção 4.8.

4.7 MUDANÇA DE BASE

Você já deve ter visto uma situação em que a resolução de um problema de Física (de cinemática ou estática, por exemplo) torna-se muito mais simples se for escolhido um referencial conveniente para descrever o movimento. Por exemplo, num problema em que um corpo se move no plano xy, cuja trajetória é uma elipse de equação $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ (veja a Figura 4.7.1), a descrição do movimento torna-se muito simplificada se ao invés de trabalharmos com os eixos x e y (isto é, o referencial determinado pela base formada por $\vec{i}$ e $\vec{j}$), utilizamos um referencial que se apóia nos eixos principais da elipse.

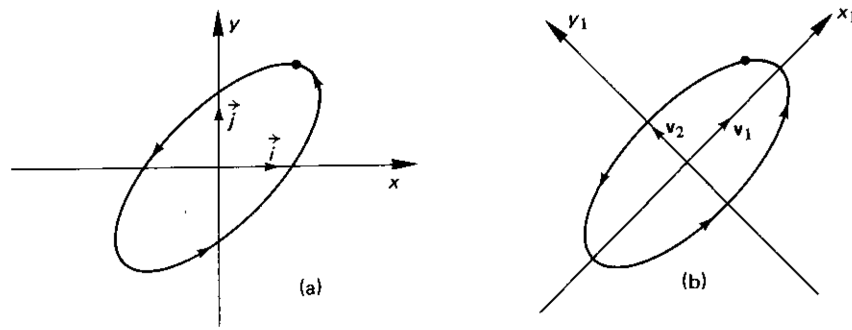


Figura 4.7.1

Neste novo referencial, a equação da trajetória será mais simples:

$$3x_1^2 + 2y_1^2 = 6$$

(Depois você verá, no Capítulo 11, como foi encontrada esta equação.)

Numa situação desse tipo, temos duas questões a resolver:

1) Como escolher o novo referencial?

2) Uma vez escolhido, qual a relação entre as coordenadas de um ponto no antigo referencial e suas coordenadas no novo?

A primeira questão é mais delicada e será estudada no Capítulo 11. Agora, veremos como solucionar a segunda. Passando a um contexto mais amplo, estamos interessados na seguinte situação.

4.7.1 Sejam $\beta = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ e $\beta' = \{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado um vetor $\mathbf{v} \in V$, podemos escrevê-lo como:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + ... + x_n\mathbf{u}_n$$
$$\text{e} \quad (\S) \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{w}_1 + ... + y_n\mathbf{w}_n$$

Como podemos relacionar as coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base β,

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

com as coordenadas do mesmo vetor $\mathbf{v}$ em relação à base β',

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Já que $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ é base de V, podemos escrever os vetores $\mathbf{w}_i$ como combinação linear dos $\mathbf{u}_j$, isto é,

$$(\S\S) \begin{cases} \mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + ... + a_{n1}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{w}_2 = a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + ... + a_{n2}\mathbf{u}_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + ... + a_{nn}\mathbf{u}_n \end{cases}$$

Substituindo em (§) temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= y_1\mathbf{w}_1 + ... + y_n\mathbf{w}_n \\ &= y_1(a_{11}\mathbf{u}_1 + ... + a_{n1}\mathbf{u}_n) + ... + y_n(a_{1n}\mathbf{u}_1 + ... + a_{nn}\mathbf{u}_n) \\ &= (a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n)\mathbf{u}_1 + ... + (a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n)\mathbf{u}_n \end{aligned}$$

Mas $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + ... + x_n\mathbf{u}_n$, e como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Isto é, denotando

$$[I]^{\beta'}_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

temos

$$[\mathbf{v}]_\beta = [I]^{\beta'}_{\beta}[\mathbf{v}]_{\beta'}$$

A matriz $[I]^{\beta'}_{\beta}$ é chamada *matriz de mudança da base β' para a base β.*

Compare $[I]^{\beta'}_{\beta}$ com (§§) e observe que esta matriz é obtida, colocando as coordenadas em relação a β de $\mathbf{w}_i$ na i-ésima coluna. Note que uma vez obtida $[I]^{\beta'}_{\beta}$ podemos encontrar as coordenadas de qualquer vetor $\mathbf{v}$ em relação à base β, multiplicando a matriz pelas coordenadas de $\mathbf{v}$ na base β' (supostamente conhecidas).

O exemplo a seguir esclarece melhor o papel da matriz de mudança de base.

Exemplo: Sejam $\beta = \{(2, -1), (3, 4)\}$ e $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ bases de $\mathbf{R}^2$. Procuremos, inicialmente, $[I]^{\beta'}_{\beta}$.

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0) = a_{11}(2, 1) + a_{21}(3, 4)$$

donde $(1, 0) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21})$.

Isto implica que $a_{11} = \dfrac{4}{11}$ e $a_{21} = \dfrac{1}{11}$.

$$\mathbf{w}_2 = (0, 1) = a_{12}(2, -1) + a_{22}(3, 4)$$

Resolvendo, $a_{12} = \dfrac{-3}{11}$ e $a_{22} = \dfrac{2}{11}$.

Portanto,

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

Podemos usar esta matriz para encontrar, por exemplo, $[\mathbf{v}]_{\beta}$ para $\mathbf{v} = (5, -8)$.

$$\begin{aligned} [(5, -8)]_{\beta} &= [I]_{\beta}^{\beta'} [(5, -8)]_{\beta'} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Isto é,

$$(5, -8) = 4(2, -1) - 1(3, 4)$$

É claro que se o nosso problema fosse só encontrar as coordenadas de $(5, -8)$, em relação à base β, poderíamos simplesmente resolver o sistema

$$(5, -8) = a(2, -1) + b(3, 4).$$

O cálculo feito através da matriz de mudança de base é operacionalmente vantajoso quando trabalharmos com mais vetores, pois neste caso não teremos que resolver um sistema de equações para cada vetor.

4.7.2 A Inversa da Matriz de Mudança de Base: Se em 4.7.1 começarmos escrevendo os $\mathbf{u}_i$ em função dos $\mathbf{w}_j$, chegaremos à relação:

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} [\mathbf{v}]_{\beta}$$

Um fato importante é que as matrizes $[I]_{\beta'}^{\beta}$ e $[I]_{\beta}^{\beta'}$ são inversíveis e

$$([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta}$$

Veja o Exercício 34 da secção 4.8.

4.7.3 Exemplos

Exemplo 1: No exemplo anterior podemos obter $[I]_{\beta}^{\beta'}$ a partir de $[I]_{\beta'}^{\beta}$.

Note que $[I]_{\beta'}^{\beta}$ é fácil de ser calculada, pois β' é a base canônica.

$$\begin{aligned} (2, -1) &= 2(1, 0) - 1(0, 1) \\ (3, 4) &= 3(1, 0) + 4(0, 1) \end{aligned}$$

donde

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Então $[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$

Exemplo 2: Consideremos em $\mathbf{R}^2$ a base $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e a base $\beta' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, obtida da base canônica β pela rotação de um ângulo θ. Dado um vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ de coordenadas

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

em relação à base β, quais são as coordenadas

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

em relação à base β'? Temos então

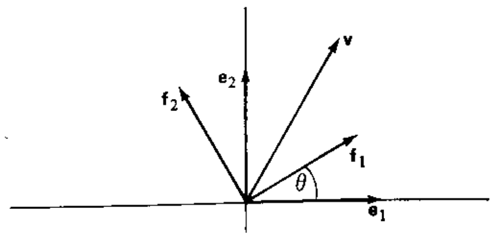


Figura 4.7.2

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \\ &= y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 \end{aligned}$$

e queremos calcular

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} [\mathbf{v}]_{\beta}$$

ou seja, temos que achar a matriz $[I]_{\beta'}^{\beta}$. Para isto, devemos escrever $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ em função de $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$. Veja as Figuras 4.7.3 e 4.7.4.

$\mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{f}_1 - \operatorname{sen}\theta\mathbf{f}_2$

$\mathbf{e}_2 = \operatorname{sen}\theta\mathbf{f}_1 + \cos\theta\mathbf{f}_2$

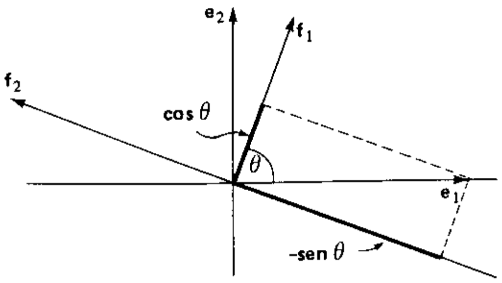


Figura 4.7.3

Portanto, $[I]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

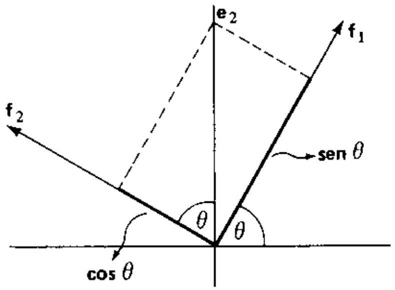


Figura 4.7.4

donde $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

ou seja, $y_1 = x_1\cos\theta + x_2\operatorname{sen}\theta$

$y_2 = -x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta$

Como subexemplo, quando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, para $\mathbf{v} = (-2, 3)$, isto é

$$\mathbf{v} = -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad \text{temos} \quad [\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

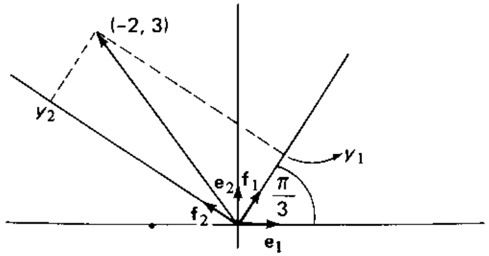


Figura 4.7.5

e queremos determinar as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\beta' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.

Como vimos, $[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

onde $y_1 = x_1\cos\theta + x_2\operatorname{sen}\theta = -2\cos\dfrac{\pi}{3} + 3\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}$

$y_2 = -x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} + 3\cos\dfrac{\pi}{3}$

donde $[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2 + 3\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

ou seja, $\mathbf{v} = \left(\dfrac{-2 + 3\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{f}_1 + \left(\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{f}_2$

4.8 EXERCÍCIOS

1. *a)* Seja V o espaço vetorial $\mathbf{R}^n$, definido no Exemplo 2 de 4.2.2. Qual é o vetor nulo de V e o que é $-(x_1, x_2, \ldots, x_n)$? *b)* Seja $\mathbf{W} = M(2, 2)$ (veja 4.2.2 Exemplo 3 *i*)) descreva o vetor nulo e vetor oposto.

2. Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbf{R}^4$ são subespaços

   a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$

   b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$

3. Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$. Em caso afirmativo exiba geradores

   a) $V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ e } b = c\right\}$

   b) $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ e } b = c + 1\right\}$

4. Considere dois vetores (a, b) e (c, d) no plano. Se $ad - bc = 0$, mostre que eles são LD. Se $ad - bc \neq 0$, mostre que eles são LI.

5. Verifique se os conjuntos abaixo são espaço vetoriais reais, com as operações usuais. No caso afirmativo, exiba uma base e dê a dimensão.

   a) Matrizes diagonais $n \times n$

   b) Matrizes escalares $n \times n$

c) $\left\{\begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbf{R}\right\}$

d) $V = \{(a, a, ..., a) \in \mathbf{R}^n : a \in \mathbf{R}\}$

e) $\{(1, a, b): a, b \in \mathbf{R}\}$

f) A reta $\{(x, x+3): x \in \mathbf{R}\}$

g) $\{(a, 2a, 3a): a \in \mathbf{R}\}$

6. Considere o subespaço de $\mathbf{R}^4$

$S = [(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)]$

a) O vetor $(\frac{2}{3}, 1, -1, 2)$ pertence a S?

b) O vetor $(0, 0, 1, 1)$ pertence a S?

7. Seja W o subespaço de $M(2, 2)$ definido por

$$W = \left\{\begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbf{R}\right\}$$

a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$? *b)* $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

8. Seja W o subespaço de $M(3, 2)$ gerado por

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. O vetor $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ pertence a W?

9. Mostre que

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é base de $M(2, 2)$.

10. Escreva uma base para o espaço vetorial das matrizes $n \times n$. Qual a dimensão deste espaço?

11. Quais são as coordenadas de $x = (1, 0, 0)$ em relação à base $\beta = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$?

12. Qual seria uma base "natural" para P_n? (Veja o Exemplo 4 de 4.2.2). Dê a dimensão deste espaço vetorial.

13. Mostre que os polinômios $1 - t^3$, $(1-t)^2$, $1 - t$ e 1 geram o espaço dos polinômios de grau $\leqslant 3$.

14. Considere $[-a, a]$ um intervalo simétrico e $C^1[-a, a]$ o conjunto das funções reais definidas no intervalo $[-a, a]$ que possuem derivadas contínuas no intervalo. Sejam ainda os subconjuntos $V_1 = \{f(x) \in C^1[-a, a] \mid f(-x) = f(x), \forall x \in [-a, a]\}$ e $V_2 = \{f(x) \in C^1[-a, a] \mid f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a, a]\}$.

a) Mostre que $C^1[-a, a]$ é um espaço vetorial real.

b) Mostre que V_1 e V_2 são subespaços de $C^1[-a, a]$.

c) Mostre que $V_1 \oplus V_2 = C^1[-a, a]$.

15. Seja V o espaço das matrizes 2×2 sobre $\mathbf{R}$, e seja W o subespaço gerado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma base, e a dimensão de W.

16. Seja P o conjunto de todos os polinômios (de qualquer grau) com coeficientes reais. Existe uma base finita para este espaço? Encontre uma "base" para P e justifique então por que P é conhecido como um espaço de dimensão infinita.

17. *a)* Dada uma matriz **A** de ordem $m \times n$, você pode considerar as m linhas como vetores do $\mathbf{R}^n$ e o subespaço V, de $\mathbf{R}^n$, gerado por estes m vetores. Da mesma forma para a matriz **B**, linha reduzida à forma escada de **A**, podemos considerar o subespaço W gerado pelos m vetores, dados por suas linhas. Observando que cada linha de **B** é obtida por combinação linear das linhas de **A** e vice-versa (basta reverter as operações com as linhas), justifique que $V = W$.

b) Mostre, ainda, que os vetores dados pelas linhas não nulas de uma matriz-linha reduzida à forma escada são LI.

18. Considere o subespaço de $\mathbf{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$.

a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$? Justifique.

b) Exiba uma base para $[v_1, v_2, v_3, v_4]$. Qual é a dimensão?

c) $[v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbf{R}^4$? Por quê?

19. Considere o subespaço de $\mathbf{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$. $[v_1, v_2, v_3] = \mathbf{R}^3$? Por quê?

20. Use o exercício 17 para exibir uma base para o subespaço S, definido no Exercício 6. Qual é a dimensão de S?

21. Considere o sistema linear

$$(\S)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = a \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = b \\ 6x_2 - 14x_3 = c \end{cases}$$

Seja $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3\colon (x_1, x_2, x_3)$ é solução de $(\S)\}$. Isto é, W é o conjunto-solução do sistema.

a) Que condições devemos impor a a, b e c para que W seja subespaço vetorial de $\mathbf{R}^3$?
b) Nas condições determinadas em *a*) encontre uma base para W.
c) Que relação existe entre a dimensão de W e o grau de liberdade do sistema? Seria este resultado válido para quaisquer sistemas homogêneos?

22. Seja U o subespaço de $\mathbf{R}^3$, gerado por $(1, 0, 0)$ e W o subespaço de $\mathbf{R}^3$, gerado por $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Mostre que $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

23 Demonstre o teorema 4.3.5, isto é, mostre que, dados $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in$ $\in W_1 + W_2$ e $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2' \in W_1 + W_2$ (onde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1' \in W_1$ e $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2' \in W_2$), então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ e $k\mathbf{u} \in W_1 + W_2$ para todo $k \in \mathbf{R}$.

24. Mostre que, se $V = W_1 \oplus W_2$ e $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ é a base de W_1, $\beta = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r\}$ é a base de W_2 então $\gamma = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r\}$ é base de V.

Mostre com um exemplo que o resultado não continua verdadeiro se a soma de subespaços não for uma soma direta.

25. Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) | \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e
$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$
subespaços de $\mathbf{R}^4$.

a) Determine $W_1 \cap W_2$.
b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.
c) Determine $W_1 + W_2$.
d) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.
e) $W_1 + W_2 = \mathbf{R}^4$?

26. Sejam $W_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tais que } a = d \text{ e } b = c\right\}$

e $W_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tais que } a = c \text{ e } b = d\right\}$

subespaços de $M(2, 2)$

a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.
b) Determine $W_1 + W_2$. É soma direta? $W_1 + W_2 = M(2, 2)$?

27. *a*) Dado o subespaço $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ ache um subespaço V_2 tal que $\mathbf{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.
b) Dê exemplos de dois subespaços de dimensão dois de $\mathbf{R}^3$ tais que $V_1 + V_2 = \mathbf{R}^3$. A soma é direta?

28. Ilustre com um exemplo a proposição: "Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então:
$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$."

29. Sejam $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $\beta_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases ordenadas de $\mathbf{R}^2$.

a) Ache as matrizes de mudança de base:
i) $[I]^{\beta_1}_{\beta}$ *ii*) $[I]^{\beta}_{\beta_1}$ *iii*) $[I]^{\beta}_{\beta_2}$ *iv*) $[I]^{\beta}_{\beta_3}$

b) Quais são as coordenadas do vetor $\mathbf{v} = (3, -2)$ em relação à base:
i) β *ii*) β_1 *iii*) β_2 *iv*) β_3

c) As coordenadas de um vetor $\mathbf{v}$ em relação à base β_1 são dadas por

$$[\mathbf{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais são as coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base:
i) β *ii*) β_2 *iii*) β_3

30. Se

$$[I]^{\alpha'}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ache

a) $[\mathbf{v}]_{\alpha}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *b*) $[\mathbf{v}]_{\alpha'}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

31. Se β' é obtida de β, a base canônica de $\mathbf{R}^2$, pela rotação por um ângulo $-\frac{\pi}{3}$, ache

a) $[I]_{\beta}^{\beta'}$ *b*) $[I]_{\beta'}^{\beta}$

32. Sejam $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 2)\}$, $\beta_2 = \{(-1, 0), (1, 1)\}$ e $\beta_3 = \{(-1, -1), (0, -1)\}$ três bases ordenadas de $\mathbf{R}^2$.

a) Ache

i) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$ *ii*) $[I]_{\beta_2}^{\beta_3}$ *iii*) $[I]_{\beta_1}^{\beta_3}$ *iv*) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2} \cdot [I]_{\beta_2}^{\beta_3}$

b) Se for possível, dê uma relação entre estas matrizes de mudança de base.

33. Seja V o espaço vetorial de matrizes 2 × 2 triangulares superiores. Sejam

$$\beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{e } \beta_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

duas bases de V. Ache $[I]_{\beta}^{\beta_1}$

34. Volte a 4.7.2 e mostre efetivamente que $([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta}$

35. Se α é base de um espaço vetorial, qual é a matriz de mudança de base $[I]_{\alpha}^{\alpha}$?

4.9 RESPOSTAS

4.9.1 Respostas de 4.8

1. $0 = (0, 0, ..., 0)$ e $-(x_1, ..., x_n) = (-x_1, ..., -x_n)$

2. *a*) Façamos os testes, lembrando-nos que o que define W são as condições dentro dos parênteses

i) Sejam $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in W$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W$. Então $v_1 + v_2$ está ainda em W? Vejamos:

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2).$$

Testemos se este novo vetor satisfaz as condições que definem W:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$$
$$(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) = (z_1 - t_1) + (z_2 - t_2) = 0 + 0 = 0$$

pois v_1 e v_2 estão em W e satisfazem as condições implicando que $v_1 + v_2$ também o faça. Portanto $v_1 + v_2 \in W$.

ii) Seja $v = (x, y, z, t) \in W$ e $\lambda \in \mathbf{R}$. Então $\lambda \cdot v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$. Testemos as condições:

$$\lambda x + \lambda y = \lambda\,(x + y) = \lambda \cdot 0 = 0$$
$$\lambda z - \lambda t = \lambda\,(z - t) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Assim $\lambda v \in W$. Portanto W é subespaço.

b) O mecanismo é análogo.

3. *a*) Façamos os testes para V.

Sejam $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ vetores em V e $\lambda \in \mathbf{R}$. Então

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \text{ e}$$

vale que $b_1 + b_2 = c_1 + c_2$ pois $b_1 = c_1$ e $b_2 = c_2$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{bmatrix} \text{ e vale } \lambda b_1 = \lambda c_1 \text{ pois } b_1 = c_1.$$

Portanto W é subespaço de $M(2, 2)$.

b) Façamos os testes para W. Supondo os vetores acima em W ao fazermos a soma teremos que testar *se* $b_1 + b_2 = c_1 + c_2 + 1$, que é a propriedade que caracteriza W. Porém $b_1 = c_1 + 1$ e $b_2 = c_2 + 1$ e, portanto, $b_1 + b_2 = c_1 + 1 + c_2 + 1 = c_1 + c_2 + 2$. Assim W não é subespaço.

Poderíamos ter a resposta mais rapidamente se observássemos que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

não está em W pois não satisfaz a propriedade que o caracteriza.

Vamos exibir geradores apenas para V já que não existe este conceito em W(não é subespaço). Observe que a forma mais geral de um vetor de V é

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ que pode ser escrita como $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e

$d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Além disso $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ estão

em V. Portanto, todo vetor de V é combinação linear de v_1, v_2 e v_3, ou seja, v_1, v_2, v_3 são os geradores procurados $V = [v_1, v_2, v_3]$.

5. *a*) Sim; $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right\}$; n

b) Sim; $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right\}$ 1

c) Sim; $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, 2

d) Sim; $\{(1, \ldots, 1)\}$; 1

e) Não.

f) Não.

g) Sim. $\{(1, 2, 3)\}$; 1.

7. *a*) Pertence

b) Não pertence

9. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e os vetores são LI.

11. $[x]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

13. Seja $at^3 + bt^2 + ct + d = \alpha(1 - t^3) + \beta(1 - t)^2 + \gamma(1 - t) + \delta$
Então $-\alpha = a$, $\beta = b$, $-2\beta - \gamma = c$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = d$
Portanto $\alpha = -a$, $\beta = b$, $\gamma = -2b - c$, $\delta = a + b + c + d$.

14. *c*) Note que toda função $f(x) \in C^1\,[-a, a]$ pode ser escrita como

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) \text{ com } F_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{e} \quad F_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Além disso $F_1(-x) = F_1(x)$ e $F_2(-x) = -F_2(x)$ e portanto $F_1(x) \in V_1$ e $F_2(x) \in V_2$. Assim $V_1 + V_2 = C^1\,[-a, a]$. Ainda que $g(x) \in V_1 \cap V_2$ devemos ter ao mesmo tempo $g(-x) = g(x) = -g(x)$ donde $g(x) = 0$ para todo x. Portanto $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ e $C^1\,[-a, a] = V_1 \oplus V_2$.

16. Não; $\{(1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$

18. *a*) Temos que saber se existem x, y, z e $t \in \mathbf{R}$ tais que $(2, -3, 2, 2) = x(1, -1, 0, 0) + y(0, 0, 1, 1) + z(-2, 2, 1, 1) + t(1, 0, 0, 0)$, ou seja, temos que saber se o sistema

$$\begin{cases} x \quad - 2z + t = 2 \\ -x \quad + 2z \quad = -3 \\ \quad y + z \quad = 2 \\ \quad y + z \quad = 2 \end{cases}$$

é possível ou impossível. Utilizando as técnicas (operações com linhas) do Capítulo 2 obtemos que o sistema não somente é possível como admite infinitas soluções. Portanto $(2, -3, 2, 2)$ pertence a $[v_1, v_2, v_3, v_4]$.

b) Já pelo item (*a*) poderíamos afirmar que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ não formam uma base pois uma das propriedades de uma base é o fato de qualquer vetor poder ser escrito de *modo único* como combinação linear dos vetores da base e, pelo item (*a*), como o sistema é indeterminado, existem infinitas maneiras de se fazer isto. Não utilizaremos isto, entretanto, no raciocínio que se segue. Coloquemos os vetores um sob o outro obtendo a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações com as linhas desta matriz são equivalentes no espaço vetorial a fazer combinações lineares e portanto as novas linhas serão ainda vetores do subespaço. Além disso, sendo as operações com as linhas reversíveis, as novas linhas gerarão os mesmos vetores que as linhas originais. Assim, ao operarmos com as linhas da matriz para consegui-la na forma escada não estaremos alterando o subespaço e, na forma escada, as novas linhas não nulas representarão vetores linearmente independentes e que geram o subespaço, ou seja, uma base (veja o exercício 17). No nosso caso obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo raciocínio anterior, sendo $w_1 = (1, 0, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $w_3 = (0, 0, 1, 1)$, $[v_1, v_2, v_3, v_4] = [w_1, w_2, w_3]$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ é a base procurada. A dimensão, sendo o número de vetores da base, é 3.

c) $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ não é igual a $\mathbf{R}^4$ pois $\dim [v_1, v_2, v_3, v_4] = 3$ e $\dim \mathbf{R}^4 = 4$.

20. $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 2)\}$; 2

21. *a*) $a = b = c = 0$.

b) Resolva o sistema operando com as linhas como no Capítulo 2. Verifique o grau de liberdade e quais são as variáveis livres. Atribua valor 1 para uma delas e zero para as outras e vá repetindo o processo para obter as soluções básicas (veja 2.5.7). Cada solução básica fornecerá um vetor da base de W (por quê?).

c) A dimensão de W é exatamente o grau de liberdade pois cada grau determina uma solução básica do sistema. O resultado é válido para qualquer sistema homogêneo.

22. $\dim[(1, 0, 0)] = 1$, e $\dim[(1, 1, 0), (0, 1, 1)] = 2$. Os três vetores são LI e portanto geram o $\mathbf{R}^3$. Como $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, pela proposição 4.6.9 $\dim \{(1, 0, 0) \cap [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]\} = 0$. Então a soma é direta.

24. Sugestão: Suponha que γ não seja base de V. Então ou $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_2$ não geram V ou não são LI. As duas situações resultam numa contradição. Exemplo: Sejam W_1 o plano xy e W_2 o plano xz em $\mathbf{R}^3$. A soma não é direta. Uma base de W_1 e $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ e uma de W_2 é $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$. Mas $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ não é base de $\mathbf{R}^3$.

25. Inicie achando os geradores de W_1 e W_2, observando que eles são dados por sistemas lineares e portanto devemos procurar as soluções fundamentais para tais sistemas (veja o exercício 21 e sua resposta). Para W_1 teremos

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Portanto $x = -y$ e $z = t$ e teremos dois graus de liberdade fazendo $y = 1$ e $t = 0$ e depois $y = 0$ e $t = 1$, teremos os vetores $w_1 = (-1, 1, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 1, 1)$ que são LI (verifique). Assim $W_1 = [w_1, w_2]$. Para W_2 teremos: $x - y - z + t = 0$ que fornece $x = y + z - t$ com três graus de liberdade. Fazendo $y = 1$, $z = 0$ e $t = 0$, depois $y = 0$, $z = 1$ e $t = 0$ e depois $y = 0$, $z = 0$ e $t = 1$ teremos $w_3 = (1, 1, 0, 0)$, $w_4 = (1, 0, 1, 0)$ e $w_5 = (-1, 0, 0, 1)$ que são LI (verifique). Portanto $W_2 = [w_3, w_4, w_5]$. Por outro lado $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0, z - t = 0$ e $x - y - z + t = 0\}$. Para achar $W_1 \cap W_2$ resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

Operando com as linhas (como no **Capítulo 2**), obtemos

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Portanto um grau de liberdade (na variável t). Fazendo $t = 1$, teremos a solução $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ e $t = 1$, ou seja, o vetor $v = (0, 0, 1, 1)$. Portanto

a) $W_1 \cap W_2 = [(0, 0, 1, 1)]$.

b) Uma base para $W_1 \cap W_2$ é $\{(0, 0, 1, 1)\}$ (unidimensional).

c) $W_1 + W_2 = [(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)]$

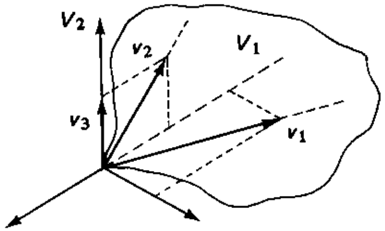
d) $W_1 + W_2$ não é soma direta pois $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$

e) Para responder se $W_1 + W_2 = \mathbf{R}^4$ vamos exibir uma base de $W_1 + W_2$. Para isto, considere seus geradores e opere com eles como no exercício 18 para obter novos geradores linearmente independentes

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $W_1 + W_2 = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$ e $\dim (W_1 + W_2) = 4$ e portanto $W_1 + W_4 = \mathbf{R}^4$.

27. *a*) Vamos calcular, inicialmente, os geradores de V_1. Observe que o sistema linear $x + 2y + z = 0$ tem dois graus de liberdade. Então $x = -2y - z$. Fazendo $y = 1$ e $z = 0$, obtemos a solução $x = -2$, $y = 1$, $z = 0$, ou seja, o vetor $v_1 = (-2, 1, 0)$. Por outro lado, fazendo $y = 0$ e $z = 1$, obtemos o vetor $v_2 = (-1, 0, 1)$. Como toda solução do sistema é combinação linear dessas soluções fundamentais, todo vetor de V_1 é combinação linear de v_1 e v_2. Portanto $V_1 = [v_1, v_2]$ (veja exercícios 21 e 25). Observe ainda que como v_1 e v_2 são LI, V_1 é de dimensão dois. Lembre agora que se temos subespaços $W_1 = [w_1, w_2, ..., w_k]$ e $W_2 = [w_{k+1}, ..., w_e]$ então $W_1 + W_2$, sendo formado pelos vetores que são obtidos por somas de vetores de W_1 e vetores de W_2, pode ser escrito $W_1 + W_2 = [w_1, w_2, ..., w_k, w_{k+1}, ... w_e]$. Portanto para obter V_2 tal que $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^3$, V_2 deve ser gerado por apenas um terceiro vetor v_3 LI com v_1 e v_2 (para completar a dimensão de $\mathbf{R}^3$) e tal que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Podemos tomar, por exemplo, $v_3 = (0, 0, 1)$ e $V_2 = [(0, 0, 1)] = \{(x, y, z) \mid x = 0, y = 0 \text{ e } z \in \mathbf{R}\}$. A disposição geométrica deste exercício é



29. *a*) *i*) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *ii*) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *iii*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ *iv*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) *i*) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ *ii*) $\begin{bmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *iii*) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ *iv*) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

c) *i*) $\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ *ii*) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{-8}{3} \end{bmatrix}$ *iii*) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

30. *a*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Procure outras soluções.

b) Um exemplo seria $V_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e $V_2 = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Neste caso a soma não seria direta pois $V_1 \cap V_2 = [(0, 1, 0)]$. Note ainda que V_1 e V_2 poderiam ser escritos como $V_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0, x \text{ e } y \text{ reais quaisquer}\}$ e $V_2 = \{(x, y, z) \mid x = 0 \text{ e } y \text{ e } z \text{ reais quaisquer}\}$. Procure outros exemplos mas note que em nenhum exemplo a soma pode ser direta porque senão a dimensão de $\mathbf{R}^3$ seria 4 (veja o exercício 29).

35. A matriz identidade.

Leituras Sugeridas e Referências

[1]Herstein, I. N.; *Tópicos de Álgebra*, Editora Polígono, São Paulo, 1970.
[2]Hoffman, K. e Kunze, R.; *Álgebra Linear*, Editora Polígono, São Paulo, 1971.
[3]Kemeny, J., Snell, J. e Thompson, G.; *Introduction to Finite Mathematics*; Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1957.
[4]Leithold, L.; *O Cálculo com Geometria Analítica*; HARBRA, São Paulo, 1977.