Conceitos e Controvérsias

Minha intenção aqui é a de apresentar opiniões e esclarecimentos sobre pontos controvertidos, dúvidas, dificuldades e questões em geral que preocupem o professor de Matemática. Os assuntos de que tratarei, gostaria que fossem sugeridos pelo leitor, motivados por seu desejo de aprimorar-se provocados por sua curiosidade, suscitados às vezes por sua perplexidade diante de opiniões divergentes. Prefiro e darei sempre prioridade a questões relativas à Matemática propriamente dita, embora possa eventualmente discutir problemas correlatos, como os didáticos, por exemplo.

Enquanto não chegam as indagações dos leitores, vamos começar com algumas perguntas que me foram feitas, em diferentes ocasiões e lugares, por pessoas interessadas em ensinar Matemática.

1. Zero é um número natural?

Sim e não. Incluir ou não o número 0 no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de conveniência. O mesmo professor ou autor pode, em diferentes circunstâncias, escrever $0 \in \mathbb{N}$ ou $0 \notin \mathbb{N}$. Como assim?

Consultemos um tratado de Álgebra. Praticamente em todos eles encontramos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Vejamos um livro de Análise. Lá acharemos quase sempre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Por que essas preferências? É natural que o autor de um livro de Álgebra, cujo principal interesse é o estudo das operações, considere zero como um número natural pois isto lhe dará um elemento neutro para a adição de números naturais e permitirá que a diferença $x - y$ seja uma operação com valores em $\mathbb{N}$ não somente quando $x > y$ mas também se $x = y$. Assim, quando o algebrista considera zero como número natural, está facilitando a sua vida, eliminando algumas exceções.

Por outro lado, em Análise, os números naturais ocorrem muito freqüentemente como índices de termos numa seqüência.

Uma seqüência (digamos, de números reais) é uma função $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O valor que a função x assume no número natural n é indicado com a notação x_n (em vez de $x(n)$) e é chamado o "n-ésimo termo" da seqüência.

A notação $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ é usada para representar a seqüência. Aqui, o primeiro termo da seqüência é x_1, o segundo é x_2 e assim por diante. Se fôssemos considerar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ então a seqüência seria $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, na qual o primeiro termo é x_0, o segundo é x_1, etc. Em geral, x_n não seria o n-ésimo e sim o $(n+1)$-ésimo termo. Para evitar essa discrepância, é mais conveniente tomar o conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Para encerrar este tópico, uma observação sobre a nomenclatura matemática. Não adianta encaminhar a discussão no sentido de examinar se o número zero é ou não "natural" (em oposição a "artificial"). Os nomes das coisas em Matemática não são geralmente escolhidos de modo a transmitirem uma idéia sobre o que devem ser essas coisas. Os exemplos abundam: um número "imaginário" não é mais nem menos existente do que um número "real"; "grupo" é uma palavra que não indica nada sobre seu significado matemático e, finalmente, "grupo simples" é um conceito extremamente complicado, a ponto de alguns de seus exemplos mais famosos serem chamados (muito justamente) de "monstros".

2. Por que $(-1)(-1) = 1$?

Meu saudoso professor Benedito de Morais costumava explicar, a mim e a meus colegas do segundo ano ginasial, as "regras de sinal" para a multiplicação de números relativos da seguinte maneira:

1ª) o amigo do meu amigo é meu amigo, ou seja $(+)(+) = +$;
2ª) o amigo do meu inimigo é meu inimigo, isto é, $(+)(-) = -$;
3ª) o inimigo do meu amigo é meu inimigo, quer dizer, $(-)(+) = -$; e, finalmente,
4ª) o inimigo do meu inimigo é meu amigo, o que significa $(-)(-) = +$.

Sem dúvida esta ilustração era um bom artifício didático, embora alguns de nós não concordássemos com a filosofia maniqueísta contida na justificação da quarta regra (podíamos muito bem imaginar três pessoas inimigas entre si).

Considerações sociais à parte, o que os preceitos acima dizem é que multiplicar por -1 significa "trocar o sinal" e, evidentemente, trocar o sinal duas vezes equivale a deixar como está. Mas geralmente, multiplicar por $-a$ quer dizer multiplicar por $(-1)a$, ou seja, primeiro por a e depois