

MATEMÁTICA BÁSICA (MA0002)

Adriano Pedreira Cattai

<http://cattai.mat.br/uneb>

UNEB — Universidade do Estado da Bahia
DCET — Departamento de Ciências Exatas e da Terra
Licenciatura em Química
Semestre 2010.1

Apresentação

Disciplina: Matemática Básica

Código: MA0002

Carga Horária: 60 horas

Créditos: 04

Professor: Adriano Pedreira Cattai

Ementa

Geometria analítica no plano: Translação e Rotação de eixos; Seções cônicas.

Geometria analítica no espaço: Vetores. Produtos de Vetores e Aplicações. Estudo Geral da reta no \mathbb{R}^3 . Estudo Geral do Plano. Distâncias.

Objetivos

Estudo da Geometria Analítica plana e espacial a fim de proporcionar aos alunos o desenvolvimento da visão geométrica necessária à sua formação.

Metodologia

O curso será apresentado através de exposições teóricas interativas, enfatizando o maior número possível de exercícios e aplicações, os quais completarão o objetivo da disciplina.

Recursos

Quadro branco. Retroprojektor. Datashow. Softwares Matemáticos: Winplot, GeoGebra, Maple.

Sugestão Bibliográfica

1. STEINBRUCH, Alfredo. *Geometria Analítica*. McGraw-Hill, São Paulo, 1987.
2. BOULOS, Paulo & CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. Pearson Education, São Paulo 2005, 3ª edição.
3. CABRAL; CARDOSO; COSTA; FERREIRA; SOUZA. *Vetores, Retas e Planos*. Publicação Interna do Departamento de Matemática da UFBA;
4. ANTON, Howard. *Cálculo. Um novo horizonte*, vol 1 e 2, Bookman.
5. LEHMAN, Charles H. *Geometria Analítica*. Editora Globo;
6. Apostilas em PDF do professor Reginaldo de Jesus Santos.
URL: <<http://www.mat.ufmg.br/~regi/apostilas.html>>

Conteúdo Programático

1. Transformações
Translação de eixos coordenados. Simplificação de equações pela translação dos eixos coordenados. Complemento de quadrados.
2. Cônicas
Elipse, Hipérbole, Parábola.
3. Vetores no Espaço
Definição de vetores e propriedades. Combinação e dependência linear; Bases. O \mathbb{R}^3 como Espaço Vetorial. Operações com vetores: Adição de vetores. Produto por um escalar. Produto escalar: Definição e propriedades. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ângulo entre dois vetores. Projeção ortogonal. Produto escalar, vetorial e misto: Definição; Propriedades; Interpretação geométrica.

4. A reta e o plano no espaço \mathbb{R}^3

Equações vetorial e paramétricas da reta. Equações vetorial e paramétricas do plano; Posição relativa entre dois planos. Posição relativa entre duas retas ou entre uma reta e um plano. O ângulo entre: duas retas; entre dois planos e entre uma reta e um plano

5. Distâncias.

A distância entre dois pontos, a distância entre um ponto e uma reta, a distância entre duas retas, a distância entre um ponto e um plano, a distância entre dois planos, a distância entre uma reta e um plano

Dicas do Professor. Quem avisa amigo é!

- 1^a. Evite fazer segunda chamada. Estude logo para se dar bem nas primeiras provas. Evite também a final, mas saiba que a prova final faz parte do processo de avaliação. Guarde suas provas, elas garantirão seu conceito.
- 2^a. Estude a teoria e resolva muitos exercícios. Não se aprende matemática fazendo um ou dois exemplos e nem estudando na véspera de prova. Não faça só os exercícios propostos nas listas, busque mais em outros livros.
- 3^a. Preste bem atenção na aula. Não falte aula, a presença é indispensável para a compreensão da teoria.
- 4^a. Se acostume com a notação utilizada no decorrer do curso. A matemática possui uma linguagem própria, por isso, aprenda-a!
- 5^a. As Três Regras de Ouro para se dar bem em Geometria Analítica:
 - R1. Estude a teoria e faça muitos exercícios;
 - R2. Se a regra 1 não for suficiente, estude mais a teoria e faça ainda mais exercícios;
 - R3. Se as regras 1 e 2 não tiverem o efeito desejado, faça um número monstruosamente grande de exercícios.

Surgimento da Geometria Analítica

A Geometria, como ciência dedutiva, foi criada pelos gregos. Mas, apesar do seu brilhantismo, faltava operacionalidade à geometria grega. E isto só iria ser conseguido mediante a Álgebra como princípio unificador. Os gregos, porém, não eram muito bons em álgebra. Mais do que isso, somente no século XVII a álgebra estaria razoavelmente aparelhada para uma fusão criativa com a geometria.

Ocorre, porém, que o fato de haver condições para uma descoberta não exclui o toque de genialidade de alguém. E no caso da geometria analítica, fruto dessa fusão, o mérito não foi de uma só pessoa. Dois franceses, Pierre de Fermat (1.601 – 1.665) e René Descartes (1.596 – 1.650), curiosamente ambos graduados em Direito, nenhum deles matemático profissional, são os responsáveis por esse grande avanço científico: o primeiro, movido basicamente por seu grande amor, a matemática; e o segundo, por razões filosóficas. E, diga-se de passagem, não trabalharam juntos: a geometria analítica é um dos muitos casos, em ciência, de descobertas simultâneas e independentes.

Se o bem-sucedido Pierre de Fermat, zeloso e competente conselheiro junto ao Parlamento de Toulouse, dedicava muitas de suas melhores horas de lazer à matemática, certamente não era porque faltasse, alguém em sua posição, outras maneiras de preencher o tempo disponível. Na verdade, Fermat simplesmente não conseguia fugir à sua verdadeira vocação e, apesar de praticar matemática como hobby, nenhum de seus contemporâneos contribuiu tanto para o avanço desta ciência quanto ele. Além da geometria analítica, Fermat teve papel fundamental na criação do Cálculo Diferencial, do Cálculo de Probabilidades e, especialmente, da Teoria dos Números, ramo da matemática que estuda as propriedades dos números inteiros.

A contribuição de Fermat à Geometria Analítica encontra-se num pequeno texto intitulado Introdução aos Lugares Planos e Sólidos e data, no máximo, de 1.636, mas que só foi publicado em 1.679, postumamente, junto com sua obra completa. É que Fermat, bastante modesto, era avesso a publicar seus trabalhos. Disso resulta, em parte, o fato de Descartes comumente ser mais lembrado como criador da Geometria Analítica.

O interesse de Descartes pela matemática surgiu cedo, no “College de la Fleche”, escola do mais alto padrão, dirigida por jesuítas, na qual ingressara aos oito anos de idade. Mas, por uma razão muito especial, já revelava seus pendores filosóficos: a certeza que as demonstrações ou justificativas matemáticas proporcionam. Aos vinte e um anos de idade, depois de freqüentar rodas matemáticas em Paris (além de outras), já graduado em Direito, ingressa, voluntariamente, na carreira das armas, uma das poucas opções “dignas” que se ofereciam a um jovem como ele, oriundo da nobreza menor da França. Durante os quase nove anos que serviu em vários exércitos, não se sabe de nenhuma proeza militar realizada por Descartes. É que as batalhas que ocupavam seus pensamentos e seus sonhos travavam-se no campo das ciências e da filosofia.

A Geometria Analítica de Descartes apareceu em 1.637 no pequeno texto chamado “A Geometria”, como um dos três apêndices do Discurso do Método, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nela, em resumo, Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos.

A Geometria Analítica, como é hoje, pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Inclusive, sua marca mais característica, um par de eixos ortogonais, não foi usada por nenhum deles. Mas, cada um a seu modo, sabia que a idéia central era associar equações a curvas e superfícies. Neste particular, Fermat foi mais feliz. Descartes superou Fermat na notação algébrica.

Hygino H. Domingues

Transformação de coordenadas no \mathbb{R}^2 : translação e rotação

1.1 O Sistema de Coordenadas Cartesianas

Deve-se a René Descartes (1596 – 1650), matemático e filósofo francês, o estabelecer da correspondência biunívoca entre pontos de um plano e pares de números reais, assim como entre pontos do espaço e ternos de números reais. Esse fato deu origem aos que chamamos de Geometria Analítica. Graças a este princípio é que podemos, por exemplo, interpretar o comportamento de uma função através do seu gráfico num sistema de coordenadas cartesianas.

Dados dois conjuntos não vazios A e B , se $a \in A$ e $b \in B$, definimos o *par ordenado*, denotado por (a, b) , onde primeiro elemento é $a \in A$, e o segundo elemento é $b \in B$. O *produto cartesiano* de A por B é o conjunto de todos esses pares ordenados e será indicado por $A \times B$. Em símbolos, escrevemos:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \wedge b \in B\}.$$

1.1 Observação.

(i) Dados $(a, b), (c, d) \in A \times B$, temos:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

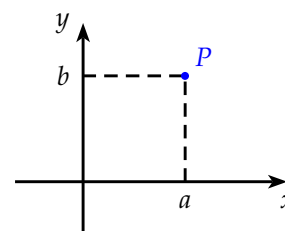
Assim por exemplo, $(5, 2)$ e $(2, 5)$ são pares ordenados distintos;

(ii) Quando $A = B$, o cartesiano $A \times B$ é o cartesiano $A \times A = A^2$;

Podemos fazer a representação gráfica do seguinte modo. Consideremos dois eixos Ox e Oy perpendiculares em O , os quais determinam um plano. Um horizontal, que será chamada o eixo das *abscissas* (ou eixo- x), e o outro vertical, o eixo das *ordenadas* (ou eixo- y). Interpretamos cada uma dessas retas como cópias de uma reta real, de tal forma que as origens de cada uma dessas cópias correspondam ao ponto de interseção dos eixos, que será chamado de origem do sistema cartesiano.

Os números reais positivos correspondem, na reta vertical, aos pontos da semi-reta superior, e na reta horizontal aos pontos da semi-reta à direita da origem. O *Plano Cartesiano* é o plano gerado por essas duas retas perpendiculares, ou seja, o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Ele auxilia no processo de construção de pontos e de lugares geométricos. Este sistema divide o plano em quatro regiões as quais chamamos de quadrantes.

Dado o par ordenado (a, b) , localizamos no eixo horizontal o ponto que corresponde ao número real a , e no eixo vertical o ponto que corresponde ao número real b . Conforme a figura ao lado, localizamos o ponto P de coordenadas a e b .



1.2 Transformação de coordenadas no \mathbb{R}^2

Frequentemente, em Geometria Analítica, somos levados a passar de um sistema de coordenadas adotado inicialmente (*antigos eixos*) para outro mais conveniente (*novos eixos*). Essa maior conveniência pode ser devida

a vários fatores, por exemplo: se o primeiro sistema não for ortogonal pode surgir à necessidade de mudar para um sistema ortogonal; outras vezes, o objetivo é simplificar os cálculos algébricos, ou explorar melhor certas simetrias, etc. O problema central será sempre estabelecer relações entre as “antigas” e as “novas” coordenadas. Esse problema se resolve pela dedução de fórmulas, denominadas *fórmulas de transformação de coordenadas*, que relacionam as coordenadas de um ponto qualquer do plano, referidas ao primeiro sistema, com as coordenadas do mesmo ponto referidas ao segundo sistema.

A principal aplicação da transformação de coordenadas é a simplificação das equações pela escolha conveniente dos eixos.

1.2 Definição (Transformação de coordenadas). Uma *transformação de coordenadas* é uma operação a qual modifica uma expressão, relação ou figura e tem como objetivo simplificar equações.

Estudaremos dois casos de transformação de coordenadas:

- (a) Translação dos Eixos Coordenados;
- (b) Rotação dos Eixos Coordenados.

1.2.1 Translação dos eixos coordenados

Consideremos uma circunferência de raio $r \neq 0$ cuja equação é dada na forma padrão

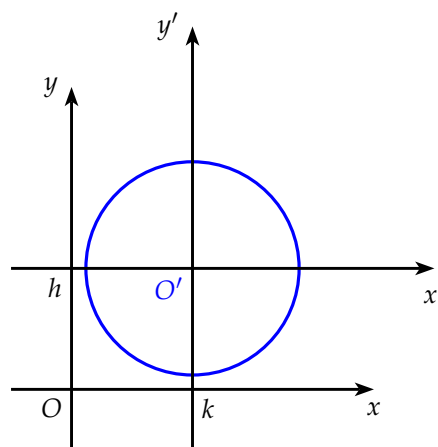
$$(x - k)^2 + (y - h)^2 = r^2 \tag{1.1}$$

em que as coordenadas (k, h) do centro O' são ambas diferentes de zero.

Se esta circunferência é mudada de posição, sendo colocada com seu centro na origem $O(0, 0)$, sua equação assume a forma canônica mais simples

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Podemos, no entanto, produzir o mesmo efeito sem mover a figura. Em vez disso, podemos mover os eixos coordenados paralelamente a si mesmo, respectivamente, no plano coordenado de maneira que a origem O coincida com o centro $O'(k, h)$ da circunferência e os eixos coordenados tomam as posições paralelas designadas pelos novos eixos, conforme a figura ao lado.



As coordenadas de um ponto P na circunferência são (x, y) quando referidas aos eixos originais, mas evidentemente são diferentes quando referidas aos novos eixos, e designaremos por (x', y') . Então a equação da circunferência referida aos novos eixos é dada pela forma canônica

$$x'^2 + y'^2 = r^2. \tag{1.2}$$

Vemos, então, que movendo os eixos coordenados paralelamente a si mesmo, respectivamente, transformamos as coordenadas (x, y) de um ponto qualquer sobre a circunferência nas coordenadas (x', y') , e como consequência, transforma a equação (1.1) na forma (1.2) que claramente é mais simples. Nesse sentido, estabelecemos a seguinte definição:

1.3 Definição (Translação dos eixos coordenados). A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos sejam paralelos aos antigos eixos, respectivamente e semelhantemente orientados, é denominada *translação dos eixos coordenados*.

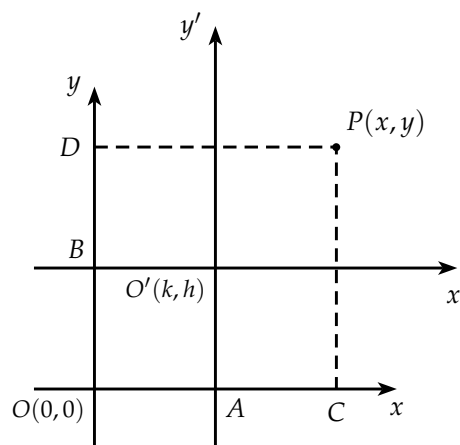
A fim de simplificar equações por translação dos eixos coordenados necessitaremos do seguinte teorema:

1.4 Teorema. Se os eixos coordenados são transladados para uma nova origem $O'(k, h)$ e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano antes e depois da translação dos eixos são (x, y) e (x', y') , respectivamente, então as equações de translação das antigas para as novas coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' + k \\ y = y' + h \end{cases}$$

Prova: Consideremos no plano xy um ponto $O'(k, h)$, arbitrário e introduzamos um novo sistema de coordenadas $x'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy . Seja P um ponto qualquer do plano tal que suas coordenadas em relação ao sistema xy são x e y e, em relação ao sistema $x'y'$ são x' e y' . Desta forma e de acordo com a figura, temos:

$$\begin{cases} x = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = x' + k \\ y = \overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} = y' + h \end{cases}$$



Exemplo 1.1. Por meio de uma translação de eixos transforme a equação

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$$

em outra mais simples à nova origem $(1, 2)$.

Solução: Pelo Teorema 1.4, as equações de transformação são $x = x' + 1$ e $y = y' + 2$. Substituindo estes valores na equação, obtemos

$$(x' + 1)^3 - 3(x' + 1)^2 - (y' + 2)^2 + 3(x' + 1) + 4(y' + 2) - 5 = 0$$

em que desenvolvendo e simplificando chegamos a

$$x'^3 - y'^2 = 0$$

que é claramente uma equação mais simples, e que podemos fazer rapidamente o desenho do seu lugar geométrico em relação aos novos eixos.

1.5 Observação. Neste exemplo, a nova origem foi especificada. Usualmente, as coordenadas da nova origem não são dadas, mas devem ser determinadas. Vejamos com o seguinte exemplo, como encontrar essa nova origem.

Exemplo 1.2. Por meio de uma translação de eixos transforme a equação

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$$

em outra desprovida de termos de 1º grau.

Solução: Pelo Teorema 1.4, as equações de transformação são $x = x' + k$ e $y = y' + h$. Substituindo estes valores na equação, obtemos

$$(x' + k)^2 - 4(y' + h)^2 + 6(x' + k) + 8(y' + h) + 1 = 0$$

que, após desenvolvimentos e redução de termos semelhantes assume a forma

$$x'^2 - 4y'^2 + (2k + 6)x' - (8h - 8)y' + k^2 - 4h^2 + 6k + 8h + 1 = 0. \tag{1.3}$$

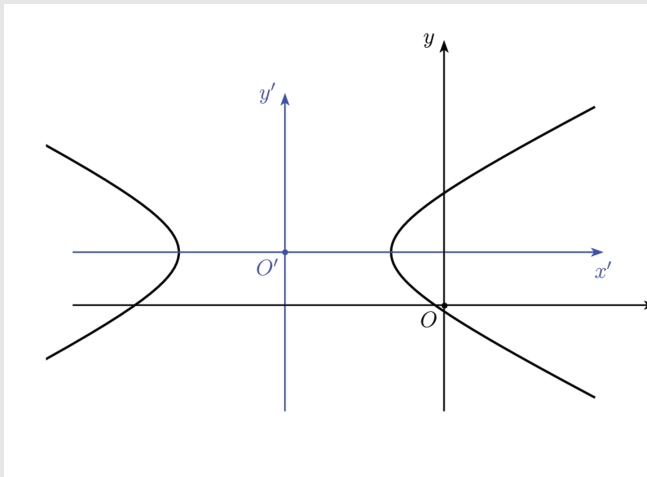
Como devemos encontrar os valores de k e h tal que a equação seja desprovida dos termos de 1º grau, igualaremos a zero os coeficientes de x' e y' na última equação. Portanto,

$$\begin{cases} 2k + 6 = 0 \\ 8h - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ h = 1 \end{cases}$$

Dessa forma, a nova origem é o ponto $(-3, 1)$ e substituindo esses valores em (1.3) obtemos a equação procurada

$$x'^2 - 4y'^2 = 4$$

que é uma hipérbole, veja a figura ao lado.



1.6 Observação. Note que nesse último exemplo, a equação foi dada sem o termo xy , e isso de certa forma facilitou nosso trabalho. No caso que equações do 2º grau desprovidas desse termo, é possível também, em alguns casos, efetuar a transformação pelo método de completar os quadrados. Lembre que podemos obter a partir da expressão $x^2 + bx$ o trinômio quadrado perfeito $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ se adicionarmos o termo $\frac{b^2}{4}$.

Assim completando quadrado em $(x^2 + 6x) - (4y^2 - 8y) + 1 = 0$, temos

$$(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) + 1 - 9 + 4 = 0$$

ou ainda, $(x + 3)^2 - 4(y - 1)^2 = 4$. Fazendo as substituições $x' = x + 3$ e $y' = y - 1$, obtemos a equação $x'^2 - 4y'^2 = 4$ e claramente as equações de translação são dadas por $x = x' - 3$ e $y = y' + 1$, como tínhamos obtido no exemplo anteriormente.

Notemos então, que a principal aplicação de Translação dos Eixos Coordenados é a remoção dos termos de 1º grau. Vejamos então, o segundo caso de Transformação de coordenadas.

1.2.2 Rotação dos eixos coordenados

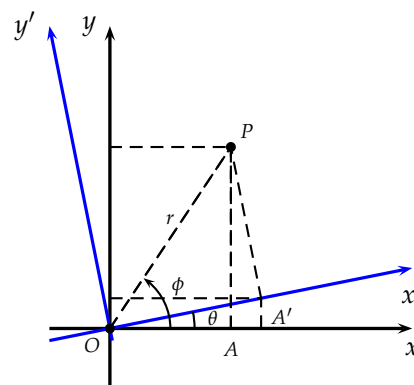
1.7 Definição (Rotação dos eixos coordenados). A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos e os antigos eixos possuam a mesma origem, é denominado *rotação dos eixos coordenados*.

Vejamos como é dada essa rotação a fim de simplificar equações.

Consideremos o plano Oxy e seja θ o ângulo de rotação o qual é obtido um novo sistema tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida de Ox e Oy .

Seja P um ponto qualquer do plano tal que suas coordenadas em relação ao sistema Oxy são x e y e, em relação aos sistemas $O'x'y'$ são x' e y' . Desta forma e de acordo com a figura, temos:

$$\begin{cases} x' = \overline{OA'} = r \cos \phi \\ y' = \overline{A'P} = r \sin \phi \end{cases} \quad (1.4)$$



e

$$\begin{cases} x = \overline{OA} = r \cos(\theta + \phi) = r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi \\ y = \overline{AP} = r \sin(\theta + \phi) = r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi \end{cases} \quad (1.5)$$

Portanto, substituindo-se (1.4) em (1.5) temos:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

que são as equações de rotação. Acabamos de provar o seguinte teorema:

1.8 Teorema. Se girarmos os eixos coordenados de um ângulo θ em torno de sua origem O e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano antes e depois da rotação dos eixos são (x, y) e (x', y') , respectivamente, então as equações de rotação das antigas para as novas coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

Sob forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

onde

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

é a matriz rotação sob o ângulo θ .

1.9 Observação. As equações de rotação nos dão as antigas coordenadas em função das novas. Se quisermos as novas em função das antigas, basta resolver em relação a x e y o sistema por elas formado. Ou seja, pela regra de Cramer, temos;

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} x & -\sin \theta \\ y & \cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}} = x \cos \theta + y \sin \theta \quad \text{e} \quad y' = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & x \\ \sin \theta & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}} = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

Essas duas fórmulas querem dizer que, para obter as novas coordenadas em função das antigas, basta substituir nas equações de rotação, x por x' , y por y' e θ por $-\theta$.

Exemplo 1.3. Determinar as novas coordenadas do ponto $(3, -4)$ quando os eixos coordenados são girados 45° .

Solução: Pelo teorema acima, as equações de transformação são

$$\begin{cases} 3 &= x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ \\ -4 &= x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ \end{cases}$$

e pela observação acima,

$$\begin{cases} x' = 3 \cos(-45^\circ) + 4 \sin(-45^\circ) = 3 \cos 45^\circ - 4 \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = 3 \sin(-45^\circ) - 4 \cos(-45^\circ) = -3 \sin 45^\circ - 4 \cos 45^\circ = -\frac{7\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Exemplo 1.4. Transformar a equação $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$, por rotação de eixos coordenados de um ângulo de 30° .

Solução: As equações de transformação são

$$\begin{cases} x = x' \cos 30^\circ - y' \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y = x' \sin 30^\circ + y' \cos 30^\circ = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

Substituindo estes valores de x e y na equação obtemos,

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \right)^2 + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \right) \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \right) + \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \right)^2 = 4$$

que, após desenvolvimentos e simplificação, obtemos a equação transformada pedida $5x'^2 + y'^2 = 8$, que é uma elipse.

1.10 Observação. Note que neste último exemplo, o ângulo de rotação foi dado. Geralmente, entretanto, o ângulo de rotação deve ser determinado a fim de alcançar alguma condição estabelecida.

Exemplo 1.5. Por uma rotação de eixos coordenados, transformar a equação

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16 = 0$$

em outra desprovida do termo misto de grau 2.

Solução: Substituindo na equação as equações de transformação, temos

$$3(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 - 2(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + 3(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 - 16 = 0$$

Desenvolvendo e pondo x'^2 , y'^2 e $x'y'$ em evidência, ficamos com:

$$x'^2(3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta + 3 \sin^2 \theta) + x'y'(-6 \cos \theta \sin \theta + 2 \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta + 6 \cos \theta \sin \theta) + y'^2(3 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + 3 \cos^2 \theta) = 16$$

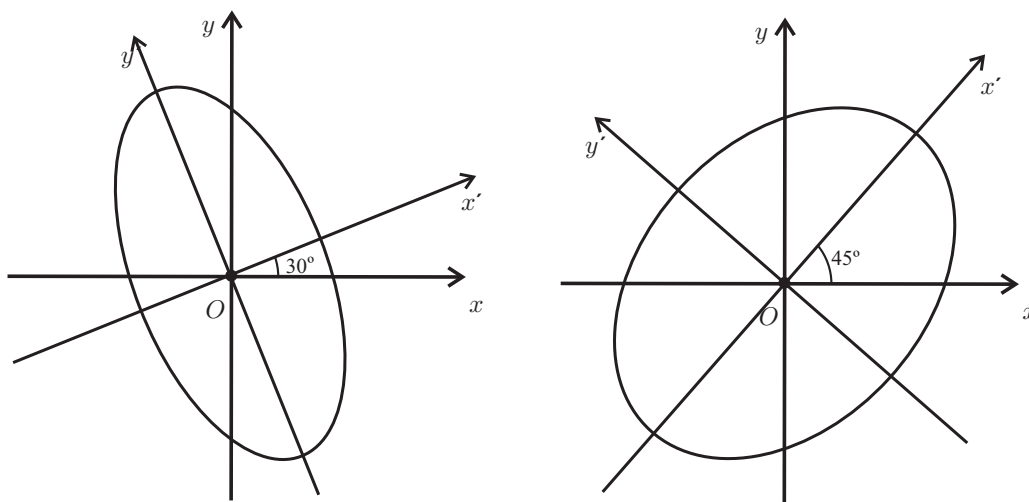
e como queremos eliminar o termo $x'y'$ dessa última equação, faremos o coeficiente desse termo igual a zero, ou seja:

$$-6 \cos \theta \sin \theta + 2 \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta + 6 \cos \theta \sin \theta = 0$$

e portanto $2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta$ onde $\theta = 45^\circ$. Usando este ângulo, obtemos $2x'^2 + 4y'^2 = 16$, ou simplesmente $x'^2 + 2y'^2 = 8$, que, como no exemplo anterior, também é uma elipse.

Esses dois últimos exemplos, serviram para ilustrar que a principal aplicação de Rotação dos Eixos Coordenados é a remoção do termo misto de 2º grau.

A seguinte figura, ilustra as rotações dos eixos, sob 30º e 45º, respectivamente, referentes aos exemplos 1.4 e 1.5. Note que, após a rotação, transformamos as equações para uma forma mais simples, de fácil identificação.



Note ainda, que o Exemplo 1.5 mostrou que em geral, aplicar as equações de rotação para uma dada equação do segundo grau a duas variáveis xy , é muito trabalhoso e demorado. O seguinte teorema nos diz como obter o ângulo de rotação dos eixos coordenados sem precisar fazer todas as contas feitas no Exemplo 1.5.

1.11 Teorema. A equação geral do segundo grau nas variáveis x e y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

quando $B \neq 0$ pode ser sempre transformada na equação

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

onde falta o termo $x'y'$, por rotação dos eixos coordenados do ângulo agudo positivo θ tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{B}{A - C} && \text{se } A \neq C \\ \theta &= 45^\circ && \text{se } A = C \end{aligned}$$

Prova: Aplicando as equações de rotação, $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ e $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$, obtemos

$$A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + C(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + D(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + E(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + F = 0$$

Desenvolvendo as operações indicadas e reduzindo os termos semelhantes nesta última equação, chegamos a

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{1.6}$$

onde

$$\begin{cases} A' = A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta \\ B' = 2(C - A) \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ C' = A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta \\ D' = D \cos \theta + E \sin \theta \\ E' = E \cos \theta - D \sin \theta \\ F' = F \end{cases} \tag{1.7}$$

Para que a equação (1.6) seja desprovida do termo misto de grau 2, o coeficiente B' deve ser nulo, portanto,

devemos ter

$$2(C - A) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) = 0.$$

Como $\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ e $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$ podemos reescrever esta última equação como

$$(C - A) \operatorname{sen}(2\theta) + B \cos(2\theta) = 0.$$

E portanto temos as seguintes relações:

(i) $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C}$ se $A \neq C$

(ii) $\cos(2\theta) = 0$ se $A = C$, visto que $B \neq 0$.
Logo $2\theta = 90^\circ$ e portanto $\theta = 45^\circ$.

Exemplo 1.6. Por uma rotação de eixos coordenados, transformar as equações em outras desprovidas do termo misto de grau 2.

(a) $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$

(b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16 = 0$

(c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$

Solução:

(a) Temos $A = 2, B = \sqrt{3}, C = 1$ e $F = -4$, e como $A \neq C$, pelo Teorema 1.11, $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2-1} = \sqrt{3}$. Logo $\theta = 30^\circ$. Usando as equações dadas em (1.7), temos que:

$$A' = \frac{5}{2}, B' = 0, C' = \frac{1}{2}, D' = 0, E' = 0, F' = -4$$

e portanto $\frac{5}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 4$, ou ainda, $5x'^2 + y'^2 = 8$

(b) Temos $A = 3 = C$, logo $\theta = 45^\circ$, e analogamente, temos $x'^2 + 2y'^2 = 8$.

(c) Temos $A = 9, B = -24, C = 16, D = -40, E = -30$ e $F = 0$, e como $A \neq C$, temos $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{-24}{9-16} = \frac{24}{7}$.

Neste caso, é impossível exibir um θ sem auxílio de uma calculadora ou uma tábua trigonométrica. No entanto, pelas relações métrica num triângulo retângulo, temos $\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{24}{25}$ e $\cos(2\theta) = \frac{7}{25}$. Pelas seguintes identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \text{ e } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

temos $\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{3}{5}$ e $\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$. Considerando $0 < \theta < 90^\circ$, as equações de rotação são:

$$x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \text{ e } y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'$$

substituindo na equação, temos

$$9 \left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \right)^2 - 24 \left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \right) \left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \right) + 16 \left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \right)^2 - 40 \left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \right) - 30 \left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \right) = 0$$

e simplificando resulta em ??? (FAZER)

1.2.3 Aplicação: simplificação de equações por transformação de coordenadas

Dada uma equação do 2º grau, vimos que a principal aplicação da translação dos eixos coordenados é eliminação dos termos de 1º grau, e que a principal aplicação da rotação dos eixos coordenados é eliminação do termo misto do 2º grau. Ou seja, a principal aplicação da transformação de coordenadas é a simplificação das equações pela escolha conveniente dos eixos.

É então natural inquirir se uma simplificação ainda maior pode ser alcançada para algumas equações realizando ambas as operações, translação e rotação dos eixos coordenados. Com isso, enunciaremos o seguinte teorema;

1.12 Teorema. Se os eixos coordenados são submetidos tanto a uma translação como a uma rotação, tomadas em qualquer ordem, e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano referido aos conjuntos de eixos original e final são (x, y) e (x'', y'') , respectivamente, então as equações de transformação das antigas para as novas coordenadas finais são dadas por:

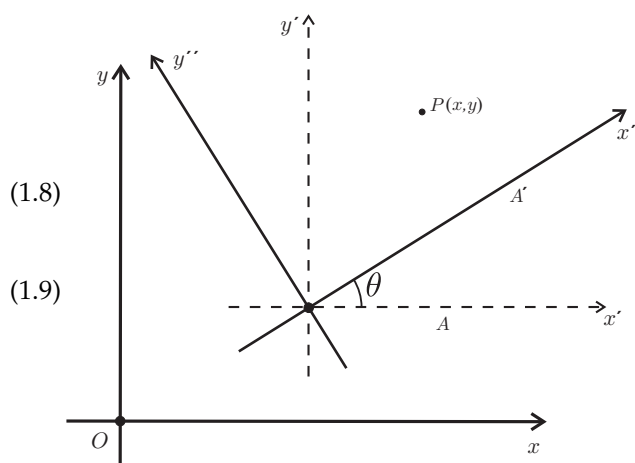
$$\begin{cases} x = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta + k \\ y = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta + h \end{cases}$$

onde θ é o ângulo de rotação e (k, h) são as coordenadas da nova origem referida aos eixos coordenados originais.

Prova: Consideremos primeiramente o caso em que uma translação dos eixos coordenados a uma nova origem $O'(k, h)$ é seguida por uma rotação dos eixos transladados em torno de O' de um ângulo θ , conforme a figura. Se P é um ponto qualquer no plano coordenado, sejam (x, y) , (x', y') e (x'', y'') suas coordenadas quando referido, respectivamente, aos eixos originais, aos transladados e aos girados. Então, pelo Teoremas 1.4 e 1.8 temos

$$(1.8) \quad \begin{cases} x = x' + k \\ y = y' + h \end{cases}$$

$$(1.9) \quad \begin{cases} x' = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta \\ y' = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta \end{cases}$$



Substituindo os valores de x' e y' dados em (1.9) em (1.8), obtemos as equações de transformação procurada.

Fica como exercício a prova da situação invertida, ou seja, quando uma rotação é seguida por uma translação.

Exemplo 1.7. Por transformação de coordenadas simplificar a equação

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$$

Cônicas

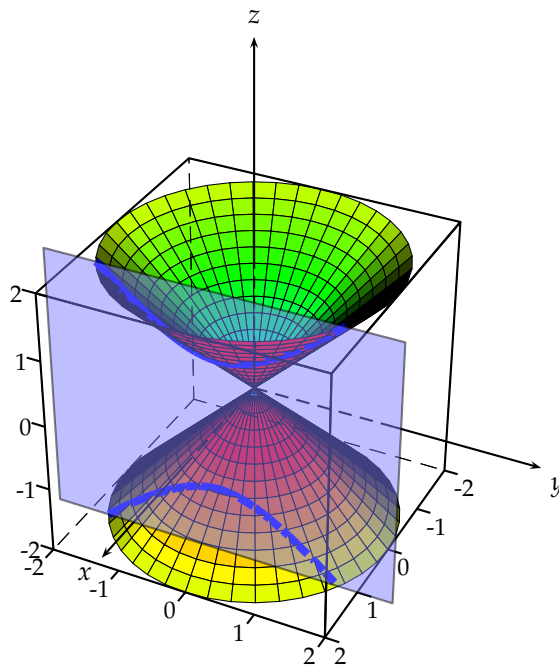
Introdução

Considere e e g duas retas concorrentes, não perpendiculares, cuja intersecção é um ponto O . Mantenha fixa uma das retas, por exemplo e (eixo), e façamos girar 360° em torno desta, mediante um ângulo constante, a outra reta g (geratriz). O objeto gerado é chamado de *superfície cônica formada por duas folhas* ou, simplesmente, *superfície cônica*, e separadas pelo vértice O .

O conjunto de pontos obtidos pela intersecção de um plano π com a superfície cônica é chamada de *seção cônica*, ou simplesmente *cônica*.

Ao seccionarmos uma superfície cônica por um plano arbitrário π , que não contém o vértice O , obtaremos uma cônica dita *não degenerada*, e, à medida que variamos a posição do plano de corte π , obtemos as seguintes cônicas não degeneradas:

- ◊ **Parábola:** o plano π é paralelo a uma geratriz da superfície cônica.
- ◊ **Elipse:** o plano π é não paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície cônica;
- ◊ **Circunferência:** o plano π é perpendicular ao eixo e .
- ◊ **Hipérbole:** o plano π é não paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície cônica.



Quando o plano π contém o vértice O da superfície, as cônicas se degeneraram em:

- ◊ **um ponto:** se o plano π intercepta somente o vértice;
- ◊ **uma reta:** se o plano π contém somente uma geratriz;
- ◊ **duas retas:** se o plano π contém o eixo e .

As cônicas possuem equações, chamadas reduzidas ou canônicas, que se tornam mais úteis, visto que, através destas, podemos determinar certos elementos que as melhor caracterizam-nas. Entretanto, para chegarmos a estas equações definiremos em termos de lugares geométricos cada cônica.

1.3 A Parábola

1.13 Definição (Parábola). Considere um plano π determinado por uma reta d e um ponto F não pertencente a esta reta. A parábola é o conjunto de todos os pontos do plano π que equidistam de F e de d .

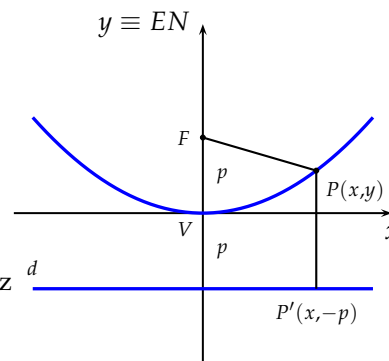
Segue da definição que dado um ponto fixo F e uma reta d , um ponto P do plano está equidistante destes se, e somente se, pertence a uma parábola, ou seja,

$$d(P, F) = d(P, d) \Leftrightarrow P \in \text{Parábola}. \quad (1.10)$$

1.3.1 Os Principais Elementos da Parábola

Como elementos da parábola temos:

- † O foco F : ponto fixo da parábola;
- † A diretriz d : reta fixa da parábola;
- † O eixo focal EF : reta que passa pelo foco F e é perpendicular a diretriz d ;



- † O vértice V : é o ponto de intersecção da parábola com seu eixo. Situado entre a diretriz e o foco exatamente no meio;
- † A corda: é obtida ligando quaisquer dois pontos distintos da parábola, por exemplo \overline{AC} ;
- † A corda focal: uma corda que passa pelo foco;
- † O *latus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal;
- † O raio focal: é o segmento de reta de extremos no foco e num ponto da parábola.

Observe que devemos considerar o fato de que $F \notin d$, pois, caso contrário, a parábola se degeneraria numa reta. Outro fato é que denominamos o número p de *parâmetro da parábola*.

1.3.2 As Equações Padrões de uma Parábola

Dizemos que uma equação é *padrão*, também denominada *canônica* ou *reduzida*, quando a utilizamos para descrever um conjunto de curvas com alguma característica em comum. A parábola possui quatro tipos de equação padrão, onde a determinação de somente uma delas será demonstrada, pois as outras são obtidas de forma semelhante.

A Equação Padrão da Parábola com o Vértice na Origem e Eixo de Simetria sobre um dos Eixos Coordenados

Sejam $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola de vértice V na origem dos eixos coordenados e de foco $F(0, p)$. Observe que qualquer ponto da diretriz d é dado por $P'(x, -p)$. Pela definição de parábola

$$P(x, y) \in \text{parábola} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d),$$

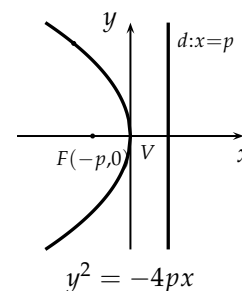
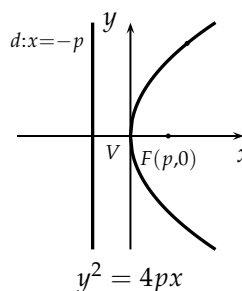
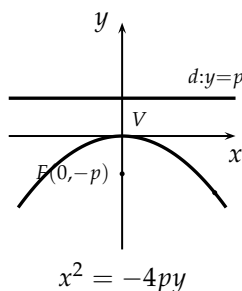
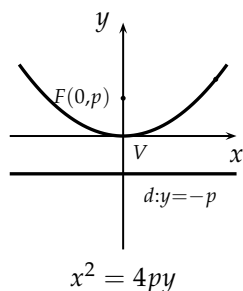
de acordo com a fórmula de distância entre pontos e a figura acima, temos:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(p + y)^2}.$$

Desenvolvendo a igualdade acima, obtemos $x^2 = 4py$, a equação reduzida da parábola para este caso.

De forma análoga, podemos obter as equações reduzidas das parábolas com vértice em $(0, 0)$ para os demais casos, onde os focos estão sobre os semi-eixos ainda não analisados. Portanto,

$$\boxed{x^2 = \pm 4py} \quad \text{ou} \quad \boxed{y^2 = \pm 4px}. \quad (1.11)$$



Da análise das equações em (1.11), tendo em vista ser x^2 (resp. y^2) sempre positivo ou nulo e que $p > 0$, podemos concluir que:

- ◇ Se o sinal no 2º membro é positivo, então a parábola tem concavidade voltada para cima (resp. direita);
- ◇ Se o sinal no 2º membro é negativo, então a parábola tem concavidade voltada para baixo (resp. esquerda).

Exemplo 1.8. Obter a equação da parábola que satisfaça as condições em cada caso.

- (a) Vértice na origem e foco em $(0, 1)$; (b) Foco em $(0, -3)$ e diretriz $y = 3$;
 (c) Vértice na origem, concavidade voltada para cima e passando pelo ponto $P(-2, 5)$.

Solução: (a) $V(0,0)$ e $F(0,1)$. Logo, $p = 1$ e de $x^2 = 4py$, obtemos: $x^2 = 4y$. (b) $F(0, -3)$ e $d : y = 3$. Portanto, $V(0,0)$ e $p = 3$. A equação é $x^2 = -4py \therefore x^2 = -12y$. (c) $V(0,0)$ e equação da forma $x^2 = 4py$. Como $(-2, 5)$ é ponto da parábola, temos $(-2)^2 = 4p5 \therefore p = \frac{1}{5}$. Portanto, a equação é $x = \frac{4}{5}y$.

Exemplo 1.9. Determinar, para cada uma das parábolas, o foco e uma equação da diretriz.

- (a) $x^2 - 16y = 0$ (b) $x = -\frac{1}{4}y^2$

Solução: (a) $x^2 = 16y \therefore p = 4$. Portanto, $F(0,4)$ e $d : y = -4$. (b) $x = -\frac{1}{4}y^2 \therefore y^2 = -4x$. Donde $p = 1$. Logo, o foco é $F(-1,0)$ e $d : x = 1$.

Exemplo 1.10. Determinar o comprimento do latus rectum de uma parábola.

Solução: Consideremos as equações $x^2 = 4py$ e $y = p$, respectivamente, a da parábola de vértice na origem e eixo focal coincidindo com o eixo das ordenadas, e a da reta perpendicular ao eixo dos y passando por $(0, p)$. Observe que a interseção dos gráficos da parábola e da reta são as extremidades L e R do latus rectum da parábola. Resolvendo-se o sistema encontraremos $x = \pm 2p$ e $y = p$. Logo, $|LR| = 4p$.

A Equação Padrão da Parábola com o Vértice Fora da Origem e Eixo de Simetria Paralelo a um dos Eixos Coordenados

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da parábola com vértice $V(h, k)$ fora da origem do sistema xOy e cujo eixo de simetria é paralelo a um dos eixos coordenados. Para isso basta transladarmos o sistema xOy para uma nova origem coincidindo com o vértice V , obtendo-se um novo sistema $x'O'y'$. Assim, as equações destas parábolas se restringirão a um dos casos a seguir:

$$\boxed{x'^2 = \pm 4py'} \quad \text{ou} \quad \boxed{y'^2 = \pm 4px'}$$

Porém, pelas equações de translação dadas no Teorema 1.4 (pág. 7), temos que $\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$. Logo,

$$\boxed{(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)} \quad \text{ou} \quad \boxed{(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)} \tag{1.12}$$

Exemplo 1.11. Determine a equação reduzida da parábola de vértice $V(3,2)$, eixo focal paralelo ao eixo das abscissas e parâmetro $p = 1$.

Solução: Pelo enunciado da questão podemos concluir que a equação reduzida é $y'^2 = \pm 4px'$. Como $p = 1$ e $V(3,2)$, ou seja, $x' = x - 3$ e $y' = y - 2$, temos $(y - 2)^2 = \pm 4(x - 3)$.

Exemplo 1.12. Dada a equação $x^2 + 6x - 8y + 17 = 0$, determine sua equação reduzida, o vértice, o foco e uma equação da sua diretriz e do eixo focal.

Solução: Completando-se o quadrado da variável x na equação dada, temos: $(x + 3)^2 = 8(y - 1)$. Portanto, o vértice é $V(-3,1)$, o foco é $F(-3,3)$, a equação da diretriz é $d : y = -1$ e o eixo focal $x = -3$.

1.14 Observação. Quando o eixo de simetria da parábola não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados, a equação é “mais complicada”, mas também se enquadra na forma geral da equação do 2º grau a duas incógnitas

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

e, por uma rotação dos eixos coordenados, podemos reduzi-la a

$$a'x^2 + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0;$$

que facilmente é identificada.

1.15 Observação (Excentricidade da Parábola). Chamamos de *excentricidade* (e) da parábola a razão entre as distâncias de um ponto arbitrário P da curva ao foco e de P à diretriz. Neste caso, teremos sempre $e = 1$.

1.4 A Elipse

1.16 Definição (Elipse). Uma *elipse* é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante e maior do que a distância entre esses pontos fixos.

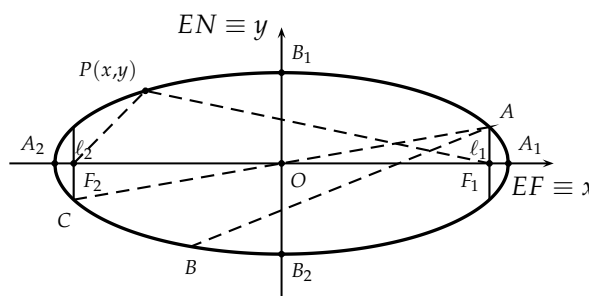
Segue da definição que dados dois pontos fixos F_1 e F_2 pertencentes a um plano π , um ponto P deste plano pertence a elipse E se, e somente se, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = K$, $K > d(F_1, F_2)$. Em símbolos temos:

$$E = \{P \in \pi; d(P, F_1) + d(P, F_2) = K, K > d(F_1, F_2)\}. \tag{1.13}$$

1.4.1 Os Principais Elementos da Elipse

Como elementos de uma elipse temos:

- † Os focos F_1 e F_2 : os pontos fixos;
- † O eixo focal EF : reta que passa pelos focos;
- † O centro O : Ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;
- † O eixo normal EN : Retta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro;
- † Os vértices A_1 e A_2 : pontos de intersecção da elipse com o eixo focal;
- † Os vértices B_1 e B_2 : pontos de intersecção da elipse com o eixo normal;
- † Eixo maior EM : segmento de reta que une os vértices A_1 e A_2 ($\overline{A_1A_2}$);



- † Eixo menor Em : segmento de reta que une os vértices B_1 e B_2 ($\overline{B_1B_2}$);
- † Corda: segmento de reta arbitrário cujas extremidades são dois pontos distintos da elipse, por exemplo \overline{AC} ;
- † Corda focal: uma corda que passa pelo foco;
- † O *latus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal (ℓ_1 e ℓ_2);
- † Raio focal: segmento de reta de extremos em um dos focos e num ponto da elipse.

1.4.2 As Equações Padrões de uma Elipse

Desenvolveremos as duas equações padrões da elipse. A primeira equação padrão a elipse é tomada com centro coincidindo com o centro $O(0,0)$ do sistema de coordenadas xOy e eixo focal coincidente a um dos eixos coordenados; e a segunda quando o centro não coincide com o centro do sistema e o eixo focal concide ou é paralelo a um dos eixos coordenados.

Primeira Equação Padrão da Elipse

1.17 Proposição. Seja E uma elipse de centro na origem do sistema coordenado xOy e cujo comprimento do eixo maior $\overline{A_1A_2}$ e do segmento de extremos em cada um de seus focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $2a$, $2b$ e $2c$. Então, para todo ponto $P(x, y) \in E$, temos:

- (a) $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$.
- (b) Sua equação cujos focos são $F_1 = (-c; 0)$ e $F_2 = (c; 0)$ é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.
- (c) Sua equação cujos focos são $F_1 = (0; -c)$ e $F_2 = (0; c)$ é $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.
- (d) O comprimento do eixo menor $\overline{B_1B_2}$ é $2b$.

Prova: Mostremos os itens (a) e (b), deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração dos itens (c) e (d). Inicialmente, considere P sobre o eixo- x , suponha $P = A_1$. Deste modo, pela definição de elipse temos:

$$K = |\overline{A_1F_1}| + |\overline{A_1F_2}| = (a - c) + (a + c) = 2a.$$

Como K é uma constante, será igual a $2a$ para todo $P(x, y) \in E$. Provaremos então (b). Por definição e pelo item (a), temos que

$$d(F_1P) + d(F_2P) = 2a,$$

ou seja,

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como $a > c$, então $a^2 - c^2 > 0$ e assim, podemos definir $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, donde $a^2 = b^2 + c^2$ e reescrever a equação acima como

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

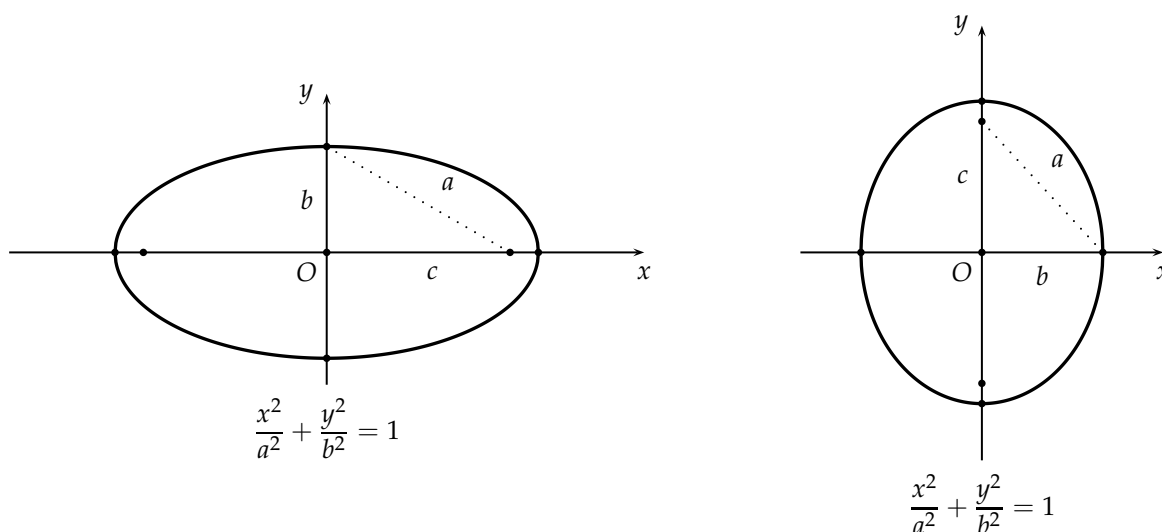
Dividindo esta última equação por $a^2b^2 \neq 0$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.14)$$

a equação reduzida da elipse para este caso.

Da análise destas deduções, temos os comprimentos do semi eixo maior e do semi eixo menor, medindo respectivamente $\frac{|EM|}{2} = a$ e $\frac{|Em|}{2} = b$.

As figuras abaixo apresentam um resumo das principais características da elipse quando o eixo focal coincide com um dos eixos coordenados.



1.18 Observação (Excentricidade da Elipse). Chamamos de *excentricidade* (e) da elipse a razão entre os comprimentos do segmento $\overline{F_1F_2}$ e do segmento $\overline{A_1A_2}$. Neste caso, temos

$$e = \frac{c}{a}.$$

Como, $0 < c < a$, a excentricidade de uma elipse é um número real não negativo menor do que 1. Observe que se $F_1 = F_2$, temos $c = 0$, então a elipse reduz-se a uma circunferência de raio $a = b$. Além disso, como $c = 0$, então $e = 0$. Assim, uma circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

Exemplo 1.13. Determine os comprimentos dos raios focais do ponto $P\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ sobre a elipse

$$5x^2 + 4y^2 = 20.$$

Solução: Como $a^2 = 5$ e $b^2 = 4$, segue que $5 = 4 + c^2$, ou seja, $c = 1$. Desta forma $F_1(1, 0)$ e $F_2(-1, 0)$.

$$\text{Logo, } d(P, F_1) = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ e } d(P, F_2) = \sqrt{(1+1)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{31}}{2}.$$

Exemplo 1.14. Prove que o comprimento do latus rectum é $\frac{2b^2}{a}$.

Solução: Consideremos as equações $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $x = c$, respectivamente, a da elipse de centro na origem e comprimentos do eixo maior $2a$ e menor $2b$, com eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas, e a

da reta perpendicular ao eixo dos x passando por c . Observe que a interseção dos gráficos da elipse e da reta são as extremidades L e R do latus rectum da elipse. Resolvendo-se o sistema encontraremos $x = c$ e $y = \pm \frac{b^2}{a}$.

Logo, $|LR| = \frac{2b^2}{a}$.

Segunda Equação Padrão da Elipse

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da elipse com centro $O'(h, k)$ fora da origem do sistema xOy e cujo eixo focal é paralelo a um dos eixos cartesianos. Para isso basta transladarmos o sistema xOy para uma nova origem coincidindo com o centro O' , obtendo-se um novo sistema $x'O'y'$. Assim, as equações destas elipses se restringirão a um dos casos a seguir:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1}$$

Porém, pelas equações de translação dadas no Teorema 1.4 temos que $\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$. Logo,

$$\boxed{\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1} \tag{1.15}$$

Exemplo 1.15. Determine a equação reduzida da elipse de centro $O'(-3, 2)$, eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas e comprimentos dos eixos maior e menor iguais a 6 e 4, respectivamente.

Solução: Como o eixo focal é paralelo ao eixo das ordenadas, a equação é $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$. O centro é $O'(-3, 2)$. Segue que $x' = x + 3$ e $y' = y - 2$. $2a = 6$ e $2b = 4$, ou seja, $a = 3$ e $b = 2$. Logo, a equação reduzida procurada é $\frac{(x + 3)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$.

1.5 A Hipérbole

1.19 Definição. Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante e menor que a distância entre esses pontos fixos.

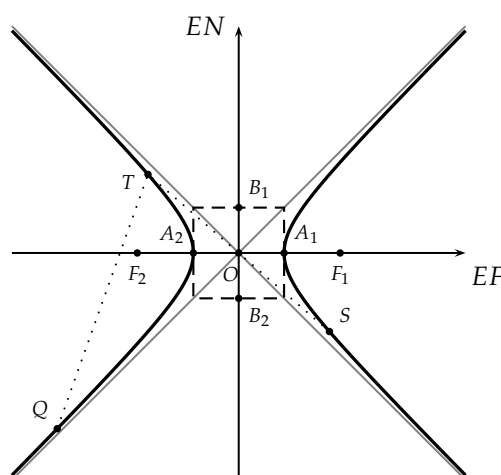
Observa-se que a hipérbole é uma curva constituída de dois ramos distintos.

Segue da definição que dados dois pontos fixos F_1 e F_2 pertencentes a um plano π , um ponto P deste plano pertence a uma hipérbole H se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = K < d(F_1, F_2).$$

Assim,

$$H = \{P \in \pi; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = K, K < d(F_1, F_2)\}. \tag{1.16}$$



1.5.1 Os Principais Elementos da Hipérbole

Como elementos da hipérbole temos:

- † Os focos: são os pontos fixos F_1 e F_2 , onde $d(F_1, F_2) = 2c$;
- † O eixo focal EF : reta que passa pelos focos;
- † O centro C : Ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;
- † O eixo normal EN : Reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro;
- † Os vértices A_1 e A_2 : pontos de intersecção da hipérbole com o eixo focal;
- † Eixo real ou transverso ET : segmento de reta que une os vértices A_1 e A_2 ($\overline{A_1A_2}$);
- † Eixo imaginário ou conjugado EC : segmento de reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro e cujo comprimento é obtido conhecendo-se os valores de K e de c ;
- † Os pontos B_1 e B_2 : extremidades do eixo imaginário ($\overline{B_1B_2}$); que une os pontos B_1 e B_2 e tendo o centro como ponto médio; seu comprimento veremos mais adiante;
- † Corda: segmento de reta arbitrário cujas extremidades são dois pontos distintos da hipérbole que podem estar no mesmo ramo ou em ramos distintos, por exemplo \overline{ST} ;
- † Corda focal: uma corda que passa pelo foco, por exemplo \overline{QT} ;
- † O *latus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal (ℓ_1 e ℓ_2);
- † Raio focal: segmento de reta de extremos em um dos focos e num ponto da hipérbole, por exemplo ($\overline{F_2T}$).

1.5.2 As Equações Padrões de uma Hipérbole

Conforme fizemos para a elipse, desenvolveremos as duas equações padrões da hipérbole. A primeira equação padrão a hipérbole é tomada com centro coincidindo com o centro $O(0, 0)$ do sistema de coordenadas xOy e eixo focal coincidente a um dos eixos coordenados; e a segunda quando o centro não coincide com o centro do sistema e o eixo focal concide ou é paralelo a um dos eixos coordenados.

Primeira Equação Padrão da Hipérbole

1.20 Proposição. Seja H uma hipérbole de centro na origem do sistema coordenado xOy e cujo comprimento do eixo transversal $\overline{A_1A_2}$ e do segmento de extremos em cada um de seus focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $2a$ e $2c$. Então, para todo ponto $P(x, y) \in H$, temos:

(a) $||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|| = 2a$.

(b) Sua equação cujos focos são $F_1 = (-c; 0)$ e $F_2 = (c; 0)$ é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e das assíntotas (retas para onde a curva se aproxima, quando $x \rightarrow \pm\infty$) são

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

(c) Sua equação cujos focos são $F_1 = (0; -c)$ e $F_2 = (0; c)$ é

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

e das assíntotas (retas para onde a curva se aproxima, quando $y \rightarrow \pm\infty$) são

$$y = \pm \frac{a}{b}x,$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

(d) O comprimento do eixo conjugado $\overline{B_1B_2}$ é $2b$.

Prova: A demonstração do item (a) é análogo ao caso da elipse dado na proposição 1.17. Mostremos os itens (b) e (d), deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração dos itens (a) e (c). Inicialmente provaremos (b). Por definição e pelo item (a), temos que

$$|d(F_1P) - d(F_2P)| = 2a,$$

ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como $c > a$, então $c^2 - a^2 > 0$ e assim, podemos definir $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, donde $c^2 = a^2 + b^2$ e reescrever a equação acima como

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Dividindo esta última equação por $a^2b^2 \neq 0$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.17}$$

a equação reduzida da elipse para este caso.

Se a equação (1.17) é resolvida em y obtemos $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ que, para $x > 0$, pode ser escrita como

$$y = \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Se x tende a $+\infty$, então o radical no segundo membro se aproxima de 1 e a equação tende a

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

O mesmo ocorre para $x < 0$, quando x tende a $-\infty$ (verifique!).

Finalmente, para provar (d), perceba que $\pm \frac{b}{a}$ é a inclinação das assíntotas, ou seja, se α é o ângulo de inclinação que a reta $y = \frac{b}{a}x$ faz com o eixo- x , temos:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{|B_1B_2|}{|A_1A_2|} = \frac{|B_1B_2|}{2a},$$

donde concluímos que $|B_1B_2| = 2b$. A nálogo para a reta $y = -\frac{b}{a}x$.

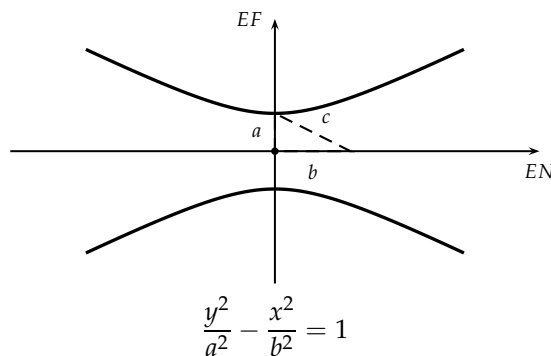
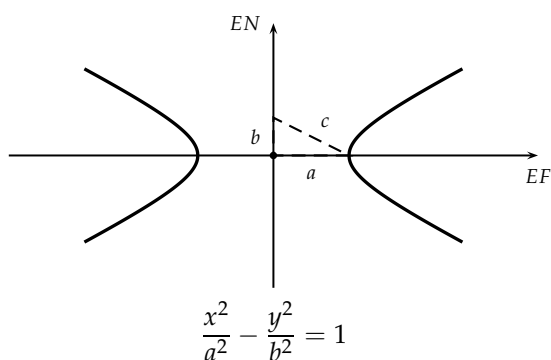
Da análise destas deduções, temos que o comprimento do semi eixo transverso e o comprimento do semi eixo conjugado são respectivamente iguais a $\frac{|ET|}{2} = \frac{|A_1A_2|}{2} = a$ e $\frac{|EC|}{2} = \frac{|B_1B_2|}{2} = b$. Estas informações são úteis na construção do esboço de uma hipérbole.

Exemplo 1.16. Determine uma equação da hipérbole de focos $F(\pm 2, 0)$ e vértices $A(\pm 1, 0)$.

Solução: Como $F(\pm 2, 0)$, o centro é $O(0, 0)$ e $c = 2$. Podemos concluir também que a equação é do tipo

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Fazemos $F_1(2,0)$ e $A_1(1,0)$, donde $c - a = 1$. Segue que $a = 1$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos $b = \sqrt{3}$. Portanto, a equação da hipérbole procurada é: $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$.

As figuras abaixo apresentam um resumo das principais características da hipérbole quando o eixo focal é paralelo a um dos eixos coordenados.



Segunda Equação Padrão da Elipse

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da hipérbole com centro $O'(h, k)$ fora da origem do sistema xOy e cujo eixo focal é paralelo a um dos eixos cartesianos. Para isso, basta transladarmos o sistema xOy para uma nova origem coincidindo com o centro O' , obtendo-se um novo sistema $x'O'y'$. Assim, as equações destas elipses se restringirão a um dos casos a seguir:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1}.$$

Porém, pelas equações de translação dadas no Teorema (1.8) temos que $\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$. Logo,

$$\boxed{\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1}. \tag{1.18}$$

Exemplo 1.17. Determine a equação do lugar geométrico descrito por um ponto que se desloca de modo que a diferença de suas distâncias aos pontos $P_1(-6, -4)$ e $P_2(2, -4)$ seja igual a 6, por duas formas: (a) utilizando a definição da hipérbole como lugar geométrico, e (b) utilizando as equações padrões.

Solução:

(a) Pela definição, podemos deduzir que este lugar geométrico plano trata de uma hipérbole e que os pontos P_1 e P_2 são os seus focos. Portanto, sendo $P(x, y)$ um ponto genérico da hipérbole, temos que $|d(P, P_1) - d(P, P_2)| = 6$. Segue que, $d(P, P_1) - d(P, P_2) = 6$ ou $d(P, P_1) - d(P, P_2) = -6$. Vamos desenvolver a

primeira destas equações. Acompanhe o raciocínio!

$$\begin{aligned}
 6 &= d(P, P_1) - d(P, P_2) \\
 6 &= \sqrt{(x - (-6))^2 + (y - (-4))^2} - \sqrt{(x - 2)^2 + (y - (-4))^2} \\
 \sqrt{(x + 6)^2 + (y + 4)^2} &= \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 4)^2} + 6 \\
 \sqrt{x^2 + 12x + 36 + y^2 + 8y + 16} &= \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16} + 6 \\
 \left(\sqrt{x^2 + 12x + y^2 + 8y + 52}\right)^2 &= \left(\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20} + 6\right)^2 \\
 x^2 + 12x + y^2 + 8y + 52 &= x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20 + 12\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20} + 36 \\
 12x + 52 &= -4x + 56 + 12\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20} \\
 16x - 4 &= 12\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20} \\
 (4x - 1)^2 &= \left(3\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20}\right)^2 \\
 16x^2 - 8x + 1 &= 9(x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20) \\
 16x^2 - 8x + 1 &= 9x^2 - 36x + 9y^2 + 72y + 180 \\
 7x^2 + 28x - 9y^2 - 72y - 179 &= 0
 \end{aligned}$$

Como exercício, desenvolva a segunda equação por um raciocínio análogo e verifique que equação você encontrou.

(b) Exercício.

1.21 Observação (Excentricidade da Hipérbole). Definimos a *excentricidade* (e) da hipérbole a razão entre os comprimentos dos segmentos $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{A_1A_2}$. Neste caso, temos

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

Exemplo 1.18. Determine a excentricidade da hipérbole cujos comprimentos dos eixos transverso e conjugado são iguais a 4 e 6, respectivamente.

Solução: Temos que $2a = 4$ e $2b = 6$. Assim, $a = 2$ e $b = 3$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, segue que, $c = \sqrt{13}$ e

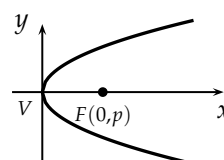
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

1.6 A Etimologia das Palavras que Definem as Seções Cônicas

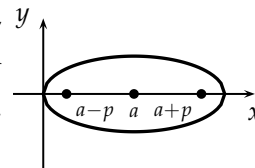
Arquimedes e os pitagóricos foram os primeiros a empregar as palavras Parábola, Elipse e Hipérbole, porém, com outra acepção da atual: seções a uma superfície cônica, que se deve a Apolônio.

Traduzida do grego

— ‘ $\pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta$ ’ a palavra parábola significa: comparação; igualdade. Deve-se ao fato da igualdade $y^2 = \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do latus rectum. Esta é obtida considerando a Parábola de vértice na origem e foco sobre o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $y^2 = 4p \cdot x$. Como o comprimento do latus rectum de uma parábola é $\ell = 4p$, temos, portanto, $y^2 = \ell \cdot x$.



— ‘ελλειψιζ’ a palavra *elipse* significa: falta; omissão. Deve-se ao fato da desigualdade $y^2 < \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do *latus rectum*. Esta é obtida considerando a *Elipse* de centro no ponto $(a,0)$ e $2a$ e $2b$ os comprimentos, respectivos, do eixo maior e menor da *elipse* de eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Isolando y^2 , obtemos $y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2x^2}{a^2}$.



Como o comprimento do *latus rectum* de uma *elipse* é $\ell = \frac{2b^2}{a}$, temos, portanto, $y^2 = \ell x - \frac{b^2x^2}{a^2}$. Donde, podemos concluir que $y^2 < \ell \cdot x$.

— ‘νπερβολη’ a palavra *hipérbole* significa: excesso; exagero. Deve-se ao fato da desigualdade $y^2 > \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do *latus rectum*. Esta é obtida considerando a *Hipérbole* de centro no ponto $(-a,0)$ e $2a$ e $2b$ os comprimentos, respectivos, do eixo real e imaginário da *Hipérbole* de eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Seguindo o mesmo raciocínio adotado anteriormente para a *Elipse*, com as devidas alterações, podemos concluir que $y^2 > \ell \cdot x$.

