Lista 02: Cônicas

1. Em cada um dos ítens, determine uma equação da parábola a partir dos elementos dados:

(a) foco $F(3,4)$ e diretriz $d: x-1=0$; $[(y-4)^2 = 4(x-2)]$

(b) foco $F(-1,1)$ e vértice $V(0,0)$; $[x^2+2xy+y^2+8x-8y=0]$

(c) vértice $V(1,2)$, eixo focal paralelo a Ox e $P(-1,6)$ é um ponto do seu gráfico; $[(y-2)^2 = -8(x-1)]$

(d) eixo focal $t: y-5=0$, diretriz $d: x-3=0$ e vértice sobre a reta $r: y=2x+3$; $[(y-5)^2 = -8(x-1)]$

(e) vértice $V(1,1)$ e foco $F(0,2)$; $[x^2+2xy+y^2+4x-12y+4=0]$

(f) eixo focal Oy e o ponto $L(2,2)$ é uma das extremidades do latus rectum. $[x^2 = 4(y-1)$ ou $x^2 = -4(y-3)]$

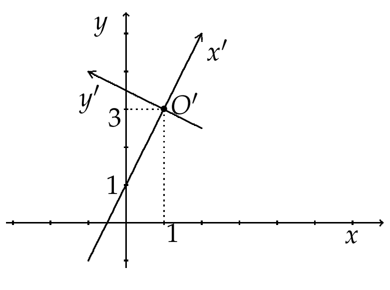
2. Dada as equações das parábolas abaixo, determine no sistema xOy as coodenadas dos vértices e do foco, a equação da diretriz e do eixo focal e o comprimento do latus rectum.

(a) $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$; $[V(-2,5/2);\ F(1,5/2);\ d: x=-5;\ ef: 2y-5=0;\ lr=12]$

(b) $y^2 - 2xy + x^2 + 16x + 16y = 0$; $[V(0,0);\ F(-2,-2);\ d: y=-x+4;\ ef: y=x;\ lr=8\sqrt{2}]$.

3. Identifique o lugar geométrico de um ponto que se desloca de modo que a sua distância ao ponto $P(-2,3)$ é igual à sua distância à reta $r: x+6=0$. Em seguida determine a equação deste lugar geométrico. [Parábola: $(y-3)^2 = 8(x+4)$]

4. Uma parábola P tem equação $y'^2 = -8x'$ em relação ao sistema x'Oy' indicado na figura abaixo. Determine as coordenadas do foco, a equação da diretriz em $x'O'y'$ e uma equação de P no sistem xOy.



Resp:
$F(-2,0)$; d: $x'=2$;
P: $4x^2 - 4xy + y^2 + (4+8\sqrt{5})x + (16\sqrt{5}-2)y + (1-56\sqrt{5}) = 0$.

5. Determine as coordenadas dos pontos que são as extremidades do latus rectum da parábola que tem como diretriz a reta $y-3=0$ e foco no ponto $F(1,1)$. Resp. $L(-1,1)$ e $R(3,1)$.

6. Em cada um dos ítens determine uma equação da elipse, a partir dos elementos dados:

(a) focos $F_1(3,8)$ e $F_2(3,2)$ e comprimento do eixo maior 10; $[\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1]$

(b) vértices $V_1(5,-1)$ e $V_2(-3,-1)$ e excentricidade $e=\frac{3}{4}$; $[\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{7} = 1]$

(c) centro $C(1,2)$, foco $F(6,2)$ e $P(4,6)$ um ponto do seu gráfico; $[\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1]$

(d) vértice $V(3,-3)$ e extremos do eixo menor $B_1(2,2)$ e $B_2(-2,-2)$; $[13x^2+10xy+13y^2-144=0]$

7. Um ponto se desloca de modo que a soma de suas distâncias aos pontos $A(3,1)$ e $B(-5,1)$ é constante igual a 10. Diga qual a curva descrita por este ponto e em seguida determine sua equação. [Elipse; $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$]

8. Determine uma equação da cônica com centro na reta $r: x-3=0$, eixo focal paralelo ao eixo Ox, um dos vértices $V(7,0)$ e $e=\dfrac{1}{2}$. [R. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$]

9. Sabendo que $P(7,5)$ é um ponto da elipse cujo os extremos do eixo maior coincidem com os extremos do latus rectum da parábola $y^2+10x-10y-30=0$, determine sua equação. [$25x^2+16y^2-150x-160y+225=0$]

10. Em cada um dos ítens, determine uma equação da hipérbole a partir dos elementos dados:

(a) focos $F_1(-1,3)$ e $F_2(-7,3)$ e comprimento do eixo transverso igual a 4; [$\frac{(x+4)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$]

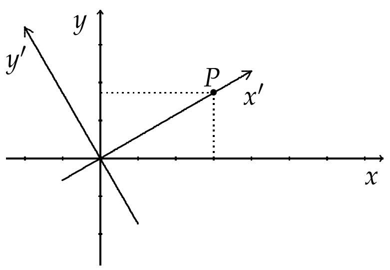
(b) vértices $V_1(5,4)$ e $V_2(1,4)$ e comprimento do latus rectum igual a 5; [$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-4)^2}{5}=1$]

(c) centro $C(0,0)$, um dos focos $F(4,4)$ e um dos vértices $V(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$; [$xy=8$]

(d) assíntotas $r: 4x+y-11=0$ e $s: 4x-y-13=0$, e um dos vértices $V(3,1)$; [$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{1/4}=1$]

(e) eixo normal: $y=2$, uma das assíntotas $r: 2x-y-4=0$ e comprimento do latus rectum igual a 3; [$\frac{(y-2)^2}{36}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$]

11. Uma hipérbole em relação ao sistema $x'O'y'$ da figura abaixo, em que $P(3,\sqrt{3})$, tem equação $\dfrac{(x'-2)^2}{4}-\dfrac{(y')^2}{4}=1$. Determine em xOy as coordenadas dos vértices e focos, a equação das assíntotas e a sua equação.



Resp: $V_1(2\sqrt{3},2)$; $V_2(0,0)$;
$F_1(\sqrt{3}(1+\sqrt{2}),1+\sqrt{2})$; $F_2(\sqrt{3}(1-\sqrt{2}),1-\sqrt{2})$;
r: $(1-\sqrt{3})y+(1+\sqrt{3})x-4=0$; s: $(1+\sqrt{3})y+(\sqrt{3}-1)x-4=0$
eq: $\frac{(\sqrt{3}x+y-4)^2}{16}-\frac{(\sqrt{3}y-x)^2}{16}=1$

12. Determine o lugar geométrico descrito por um ponto que se desloca de modo que o módulo da diferença de suas distâncias aos pontos $P_1(-6,-4)$ e $P_2(2,-4)$ é igual a 6. [$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y+4)^2}{7}=1$]

13. Dizemos que duas hipérboles são conjugadas quando o eixo transverso de cada uma delas coincide com o eixo conjugado da outra. dada a hipérbole H: $\dfrac{(y-1)^2}{9}-\dfrac{(x+3)^2}{16}=1$, determine as coodenadas dos focos da hipérbole $\overline{H}$ conjugada de H e sua equação geral. [$F_1(-8,1); F_2(2,1)$; $9x^2-16y^2+54x+32y-79=0$]

14. Sabendo que os focos de uma hipérbole equilátera coincidem com as extremidades do eixo menor da elipse $\dfrac{(x+1)^2}{36}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$, determine sua equação. [$\frac{(y-2)^2}{8}-\frac{(x+1)^2}{8}=1$]

15. O vértice de uma parábola coincide com o centro da hipérbole H: $2x^2-7y^2-4x+14y-19=0$, e sua diretriz coincide com o eixo focal da elipse $\dfrac{(x-1)^2}{4}+(y+2)^2=1$. Encontre a equação dessa parábola. [$(x-1)^2=12(y-1)$.]

Texto composto em LaTeX 2ε, APC, 11 de abril de 2010