Lista 01: Transformação de Coordenadas no $\mathbb{R}^2$

I. Translação

Nos exercícios de 1 a 5, transformar a equação dada por translação dos eixos coordenados para a mova origem, $O'(k,h)$, indicada.

1. $x^2+y^2+2x-6y+6=0 \qquad O'(-1,3)$ — R. $x'^2+y'^2=4$
2. $3x^2+2y^2+12x-4y+8=0 \qquad O'(-2,1)$ — R. $3x'^2+2y'^2=6$
3. $4x^2-y^2-8x-10y-25=0 \qquad O'(1,-5)$ — R. $4x'^2-y'^2=4$
4. $y^3-x^2+3y^2-4x+3y-3=0 \qquad O'(-2,-1)$ — R. $y'^3-x'^2=0$
5. $xy-3x+4y-13=0 \qquad O'(-4,3)$ — R. $x'y'=1$

Nos exercícios de 6 a 10, por uma translação dos eixos coordenados, transformar a equação dada em outra desprovida de termos de primeiro grau. Determine a nova origem $O'(k,h)$ usando as equações de translação. Nos exercícios de 11 a 15, use o método do completamento dos quadrados.

6. $2x^2+y^2+16x-4y+32=0$ — R. $2x'^2+y'^2=4$
7. $3x^2+2y^2-18x-8y+29=0$ — R. $3x'^2+2y'^2=6$
8. $3x^2-2y^2-42x-4y+133=0$ — R. $3x'^2-2y'^2=12$
9. $xy-x+2y-10=0$ — R. $x'y'=8$
10. $8x^3+24x^2-4y^2+24x-12y-1=0$ — R. $2x'^3-y'^2=5$
11. $4x^2+4y^2+32x-4y+45=0$ — R. $x'^2+y'^2=5$
12. $2x^2+5y^2-28x+20y+108=0$ — R. $2x'^2+5y'^2=10$
13. $x^2-3y^2+6x+6y+3=0$ — R. $x'^2-3y'^2=3$
14. $12x^2+18y^2-12x+12y-1=0$ — R. $2x'^2+3y'^2=1$
15. $12x^2-18y^2-12x-12-5=0$ — R. $2x'^2-3y'^2=1$

Nos exercícios de 16 a 20, simplificar a equação dada por uma translação dos eixos coordenados.

16. $x^2+8x-3y+10=0$ — R. $x'^2-3y'=0$
17. $16x^2+16y^2+8x-48y+5=0$ — R. $x'^2+y'^2=2$
18. $72x^2+36y^2-48x+36y-55=0$ — R. $2x'^2+y'^2=2$
19. $y^2-6x^2-24x-2y-32=0$ — R. $y'^2-6x'^2=9$
20. $30xy+24x-25y-80=0$ — R. $x'y'=2$

II. Rotação

21. Determinar as novas coordenadas do ponto $(3,-4)$ quando os eixos coordenados são girados de um ângulo de 30º. — R. $(\frac{3}{2}\sqrt{3}-2,-\frac{3}{2}-2\sqrt{3})$

22. Determinar as novas coordenadas dos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ quando os eixos coordenados são girados de um ângulo de 90º. — R. $(0,-1)$ e $(1,0)$

Nos exercícios de 23 a 28 transformar a equação dada por rotação dos eixos coordenados do ângulo θ indicado.

23. $2x+5y-3=0, \qquad \theta=\operatorname{arctg}2,5$ — R. $\sqrt{29}x'-3=0$
24. $x^2-2xy+y^2-x=0, \qquad \theta=45^{\circ}$ — R. $4y'^2-\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'=0$
25. $\sqrt{3}y^2+3xy-1=0, \qquad \theta=60^{\circ}$ — R. $3\sqrt{3}x'^2-\sqrt{3}y'^2-2=0$
26. $5x^2+3xy+y^2-4=0, \qquad \theta=\operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{10}}{10})$ — R. $11x'^2+y'^2-8=0$
27. $11x^2+24xy+4y^2-20=0, \qquad \theta=\operatorname{arctg}(0,75)$ — R. $4x'^2-y'^2-4=0$
28. $x^4+y^4+6x^2y^2-32=0, \qquad \theta=45^{\circ}$ — R. $x'^4+y'^4=16$
29. Por rotação dos eixos coordenados transformar a equação $2x-y-2=0$ em outra desprovida do termo x'. — R. $\sqrt{5}y'+2=0$

30. Por rotação dos eixos coordenados transformar a equação $x + 2y - 2 = 0$ em outra desprovida do termo y'. R. $\sqrt{5}x' - 2 = 0$

Nos exercícios de 31 a 36, por uma rotação dos eixos coordenados, transformar a equação dada em outra desprovida do termo $x'y'$.

31. $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$ R. $5x'^2 + 2x' - y' - 1 = 0$
32. $9x^2 + 3xy + 9y^2 - 5 = 0$ R. $21x'^2 + 15y'^2 - 10 = 0$
33. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2 = 0$ R. $6x'^2 + y'^2 - 2 = 0$
34. $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ R. $x' - 3y' = 0$ e $x' + 3y' = 0$
35. $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ R. $y' = \pm\sqrt{2}$
36. $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$ R. $5x'^2 + 4x' - 3y' = 0$
37. A equação de uma circunferência de raio r é $x^2 + y^2 = r^2$. Mostre que a forma desta equação permanece sem modificação quando referida aos eixos coordenados que foram girados de qualquer ângulo θ. Diz-se então que esta equação é *invariante* quanto à rotação.
39. Deduzir as equações de rotação do Teorema **??**, quando o ângulo θ é tomado com valor obtuso.
40. Pela rotação dos eixos coordenados de um ângulo de $45°$ uma certa equação é transformada na equação $4x'^2 - 9y'^2 = 36$. Encontre a equação original. R. $5x^2 - 26xy + 5y^2 + 72 = 0$

III. Simplificação por Transformação de Coordenadas

Nos exercícios 39 a 42, simplificar a equação dada por transformação de coordenadas.

41. $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$, R. $2x''^2 - 3y''^2 - 6 = 0$
42. $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 104x + 72y - 48 = 0$, R. $x''^2 + 4y''^2 - 4 = 0$
43. $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x - 80y + 100 = 0$, R. $x''^2 - 4y''^2 = 0$
44. $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0$, R. $3x''^2 + y''^2 - 3 = 0$
45. Mostre, por transformação de coordenadas, que equação geral de uma linha reta, $Ax + By + C = 0$, pode ser transformada em $y'' = 0$, que é a equação do eixo X'', ou transformada em $x'' = 0$, que é a equação do eixo Y''.
46. Determinar as coordenadas da nova origem se os eixos coordenados são transladados até transformar a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ em outra equação desprovida de termos de primeiro grau. R. $\left(\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}, \frac{2AE-BD}{B^2-4AC}\right)$, $B^2 - 4AC \neq 0$
47. Determinar as novas coordenadas do ponto $(-1, 3)$ quando os eixos coordenados são, primeiramente, transladados à nova origem $(4, 5)$ e, então, girados de um ângulo de 60^o. R. $\left(-\frac{5}{2} - \sqrt{3}, \frac{5}{2}\sqrt{3} - 1\right)$
48. Determinar as novas coordenadas do ponto $(2, 2)$ quando os eixos coordenados são, primeiramente, girados de um ângulo de 45^o e, então, transladados à nova origem $(-1, 1)$. R. $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
49. Por translação de eixos coordenados à nova origem $(3, 3)$, seguida pela rotação de eixos de um ângulo de 30^o, as coordenadas de um certo ponto P são transformadas em $(7, 6)$. Determinar as coordenadas de P em relação aos eixos originais. R. $\left(\frac{7}{2}\sqrt{3}, \frac{13}{2} + 3\sqrt{3}\right)$

Texto composto em $\LaTeX 2_\varepsilon$, APC, 11 de abril de 2010