UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
Matemática II – 2009.1 (ADM/Campus I)

Prof. Adriano Cattai
www.cattai.mat.br

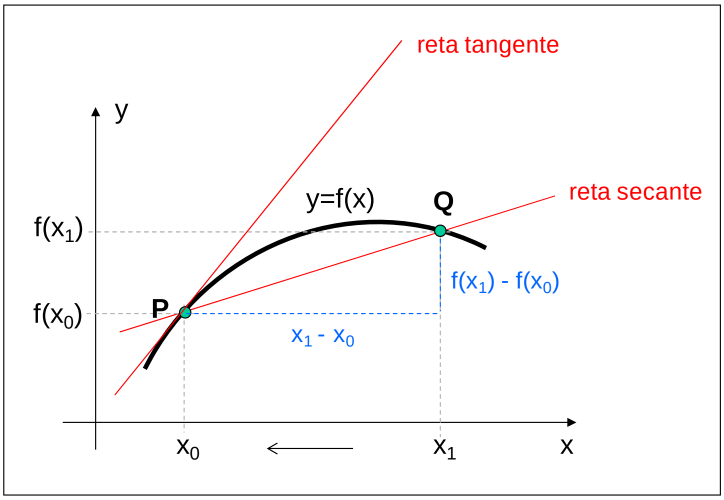
1. Retas Tangentes e Taxas de Variação: Noções Básicas

OBJETIVO: Estabelecer uma relação entre **retas tangentes** e **taxas de variação.**

2. Inclinação de uma Reta Tangente

OBJETIVO
Entender a relação entre a inclinação da reta tangente em P (m_{tg}) e a inclinação da reta secante entre P e Q (m_{sec}) quando o ponto Q se move ao longo da curva y=f(x) em direção ao ponto P.

Em muitos problemas o interesse maior será com a inclinação da reta tangente mais do que com a própria reta. Considere a figura:



De acordo com a figura, a **inclinação da reta secante** é dada por:

$$m_{\sec} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

De acordo com a mesma figura, o ponto Q move-se ao longo da curva em direção ao ponto P se e somente se x_1 tende a x_0. Assim, a **inclinação da reta tangente** em P é:

$$m_{tg} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

3. Taxas de Variação Média e Instantânea

As taxas de variação ocorrem em muitas aplicações práticas:

(a) Um microbiologista pode estar interessado na taxa segundo a qual o número de bactérias em uma colônia varia com o tempo.

(b) Um economista pode estar interessado na taxa segundo a qual o custo de produção varia com a quantidade de produtos manufaturados.

(c) Um pesquisador na área médica pode estar interessado na taxa segundo a qual o raio de uma artéria varia com a concentração de álcool na corrente sanguínea.

Em geral, se x e y forem quantidades relacionadas por uma equação y=f(x), pode-se considerar a taxa segundo a qual y varia com x.

Há distinção entre **taxa média de variação**, representada pela inclinação da reta secante, e **taxa instantânea de variação**, representada pela inclinação da reta tangente.

DEFINIÇÃO. Se y=f(x), então a **taxa de variação média de y em relação a x no intervalo [x_0, x_1]** é a inclinação m_{sec} da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos (x_0, f(x_0)) e (x_1, f(x_1)), isto é:

$$m_{\sec} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

DEFINIÇÃO. Se y=f(x), então a **taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto x_0** é a inclinação m_{tg} da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0, isto é:

$$m_{tg} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

EXEMPLO 01. Seja $y=x^2+1$.

(a) Achar a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo [3,5].

(b) Achar a taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto x=– 4.

(c) Achar a taxa de variação instantânea de y em relação a x em um ponto genérico $x=x_0$.

Solução (a)
taxa de variação média (inclinação da reta secante). Seja $f(x)= x^2+1$, $x_0=3$ e $x_1=5$. Então

$$m_{\sec} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(5) - f(3)}{5-3} = \frac{(5^2+1) - (3^2+1)}{5-3} = \frac{26-10}{5-3} = 8$$

Interpretação do resultado: no intervalo [3, 5], para cada unidade de aumento de x a variável y aumenta 8 unidades.

Solução (b)
taxa de variação instantânea (inclinação da reta tangente). Seja $f(x)= x^2+1$ e $x_0= -4$. Então

$$m_{tg} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to -4} \frac{(x_1^2+1) - ((-4)^2+1)}{x_1 - (-4)} = \lim_{x_1 \to -4} \frac{(x_1^2+1) - 17}{x_1 + 4}$$

$$= \lim_{x_1 \to -4} \frac{x_1^2 - 16}{x_1 + 4} = \lim_{x_1 \to -4} \frac{(x_1 - 4)(x_1 + 4)}{x_1 + 4} = \lim_{x_1 \to -4} (x_1 - 4) = -8$$

Interpretação do resultado: como a taxa de variação instantânea é negativa, y é decrescente no ponto x=– 4 a uma taxa de 8 unidades por unidade de acréscimo em x.

Solução (c)
taxa de variação instantânea (inclinação da reta tangente)

$$m_{tg} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{(x_1^2+1) - (x_0^2+1)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0}$$

$$= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} (x_1 + x_0) = 2x_0$$

Interpretação do resultado: a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x=x_0$ é $2x_0$.

O resultado encontrado em (b) pode ser obtido a partir deste resultado mais geral, fazendo-se $x_0= -4$.

Exercício 01. Um homem caminha ao longo de um caminho reto com velocidade 4 *m*/*s*. Uma lâmpada está localizada no chão a 20 *m* da trajetória (distância ortogonal) e é mantida focalizada na direção do homem. Qual a velocidade de rotação da lâmpada quando o homem está a 15*m* do ponto do caminho mais próximo da lâmpada? (resp. 0,128)

Exercício 02. Um bote está sendo puxado para o cais por meio de uma corda com uma extremidade presa ao bote e a outra passando por uma argola fixada ao cais, 8 m acima do nível do bote. Se o bote se aproxima do cais com uma velocidade constante de 5 m/s, com que velocidade está sendo puxada a corda no instante em que o bote ainda está a 6 m do cais?

Exercício 03. Um helicóptero sobe verticalmente a uma velocidade de 6 m/s. Um observador, a uma distância de 300 m do local de onde partiu o helicóptero, o vê sob um ângulo θ, medido em radianos. Com que velocidade está variando o ângulo θ e a distância z entre o observador e o helicóptero no instante em que o helicóptero está a uma altura de 240 m do solo? (Considere a altura do observador desprezível).