Aplicando a fórmula para a derivada de um quociente, temos

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)' = \frac{(x^3-1)'(x^3+1)-(x^3+1)'(x^3-1)}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^3+1)-3x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2} \end{aligned}$$

2.3 Problemas

1. Utilizando regras de derivação previamente estabelecidas, calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $f(x) = \dfrac{4x-5}{3x+2}$

   (b) $f(z) = \dfrac{8-z+3z^2}{2-9z}$

   (c) $f(w) = \dfrac{2w}{w^3-7}$

   (d) $s(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$

   (f) $f(x) = \dfrac{x^2+9x+2}{7}$

2. Deduza a seguinte fórmula de derivação:

   $$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

   Dê um bom palpite (chute) sobre como seria a fórmula para $(f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n)'$.

3. Ache as equações das retas tangentes ao gráfico de $y = \dfrac{5}{1+x^2}$, nos pontos $P = (0,5)$, $Q = (1,5/2)$ e $R = (-2,1)$. Esboce (caprichadamente) o gráfico dessa curva, *plotando* pontos com os seguintes valores de x: -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3. No mesmo sistema cartesiano, esboce também as retas tangentes à curva nos pontos P, Q e R.

4. Escreva as equações das retas tangente e normal à curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ no ponto de abcissa $x = 3$.

5. Determine as equações das retas t e n, respectivamente tangente e normal à curva $y = x^2$, no ponto de abcissa p.

6. (Teste sua sensibilidade sobre derivadas) Esboce o gráfico de $y = x^2 - 4$, plotando os pontos de abcissas (valores de x) -2, -1, 0, 1, 2 e 3. Em cada um desses pontos, esboce a reta tangente ao gráfico, e tente adivinhar o seu coeficiente angular. Marque seu *chute* ao lado do ponto. Em seguida, calcule cada coeficiente angular usando a derivada y'. Compare seu chute com a resposta exata.

2.3.1 Respostas e sugestões

1. (a) $f'(x) = \dfrac{23}{(3x+2)^2}$

   (b) $f'(z) = \dfrac{-27z^2 + 12z + 70}{(2-9z)^2}$

   (c) $f'(w) = \dfrac{-4w^3 - 14}{(w^3-7)^2}$

   (d) $s'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^3}$

   (e) $f'(x) = -\dfrac{1 + 2x + 3x^2}{(1 + x + x^2 + x^3)^2}$

   (f) $f'(x) = \dfrac{2x+9}{7}$ (Quando c é uma constante, temos a regra $\left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$)

2. $(f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_{n-1} f_n + f_1 f_2' \cdots f_{n-1} f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1}' f_n + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n'$.

3. As equações das três retas são, respectivamente, $y = 5$, $5x + 2y - 10 = 0$, e $4x - 5y + 13 = 0$.

4. Reta tangente: $y = 8x - 22$. Reta normal: $x + 8y - 19 = 0$.

5. $t\colon y = 2px - p^2$;

   $n\colon y = -\dfrac{x}{2p} + \dfrac{1}{2} + p^2$ (se $p \neq 0$); $n\colon x = 0$ (se $p = 0$).

3.3 Problemas

1. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$

   (a) $y = \left(\dfrac{x^3}{3} + 1\right)^5 + \left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)^4$

   (b) $y = \dfrac{((x^3 + 7)^4 + x)^5}{x^2 + 1}$

   (c) $y = \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^{10}$

2. Calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $f(x) = (x^2 - 3x + 8)^3$

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 - 1)^4}$

   (c) $F(v) = (17v - 5)^{1000}$

   (d) $s(t) = (4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-2}$

   (e) $k(u) = \dfrac{(u^2 + 1)^3}{(4u - 5)^5}$

3. Determine (i) a equação da reta tangente à curva no ponto indicado e (ii) os pontos do gráfico em que reta tangente à curva é horizontal, nos casos

   (a) $y = (4x^2 - 8x + 3)^4, \quad P = (2, 81).$

   (b) $y = (2x - 1)^{10}, \quad P = (1, 1).$

4. Se $k(x) = f(g(x))$, com $f(2) = -4$, $g(2) = 2$, $f'(2) = 3$ e $g'(2) = 5$, calcule $k'(2)$.

5. Determine y' sendo y uma função de x dada implicitamente pela equação

   (a) $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$

   (b) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

   (c) $(y^2 - 9)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$

6. Verifique primeiramente que o ponto P pertence à curva dada e ache a equação da reta tangente à curva no ponto P.

   (a) $xy = -16, \quad P = (-2, 8);$

   (b) $2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0, \quad P = (2, -3).$

7. Calcule as derivadas das seguintes funções.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 27}$
(b) $f(x) = (7x + \sqrt{x^2 + 3})^6$
(c) $f(t) = \dfrac{4}{(9t^2 + 16)^{2/3}}$
(d) $g(z) = \dfrac{\sqrt[3]{2z + 3}}{\sqrt{3z + 2}}$
(e) $F(v) = \dfrac{5}{\sqrt[5]{v^5 - 32}}$

8. Calcule $\frac{dy}{dx}$ se
   (a) $6x + \sqrt{xy} - 3y = 4$
   (b) $3x^2 + \sqrt[3]{xy} = 2y^2 + 20$

9. Uma função é *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e é *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em seu domínio. Sendo f derivável, demonstre que
   (a) Se f é par, então f' é ímpar (ou seja, se $f(-x) = f(x)$ para todo x no domínio de f), então $f'(-x) = -f'(x)$;
   (b) Se f é ímpar, então f' é par.

3.3.1 Respostas e sugestões

1. (a) $\dfrac{dy}{dx} = 5x^2\left(\dfrac{x^3}{3} + 1\right)^4 + 4x\left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)^3$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5((x^3+7)^4+x)^4(12x^2(x^3+7)^3+1)(x^2+1) - 2x((x^3+7)^4+x)^5}{(x^2+1)^2}$
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10x^9}{(x+1)^{11}}$

2. (a) $f'(x) = 3(x^2 - 3x + 8)^2(2x - 3)$
   (b) $f'(x) = \dfrac{-(7x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^5}$
   (c) $F'(v) = 17000(17v - 5)^{999}$
   (d) $s'(t) = -2(4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-3}(20t^4 - 9t^2 + 2)$
   (e) $k'(u) = \dfrac{(u^2 + 1)^2(4u^2 - 30u - 20)}{(4u - 5)^6}$

3. (a) (i) $y - 81 = 864(x - 2)$, (ii) $(1, 1)$, $(1/2, 0)$ e $(3/2, 0)$.
   (b) (i) $y - 1 = 20(x - 1)$, (ii) $(1/2, 0)$.

4. $k'(2) = 15$.

5. (a) $y' = \dfrac{-(6x^2 + 2xy)}{x^2 + 3y^2}$

   (b) $y' = -\dfrac{y^3}{x^3}$

   (c) $y' = \dfrac{(4x^2 + 3x - 1)(8x + 3)}{4y(y^2 - 9)^3}$

6. (a) $4x - y + 16 = 0$

   (b) $y + 3 = -\frac{36}{23}(x - 2)$

7. (a) $f'(x) = 8x^2(8x^3 + 27)^{-2/3} = \dfrac{8x^2}{\sqrt[3]{(8x^3 + 27)^2}}$

   (b) $f'(x) = 6(7x + \sqrt{x^2 + 3})^5 \left(7 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}\right)$

   (c) $f'(t) = \dfrac{-48t}{\sqrt[3]{(9t^2 + 16)^5}}$

   (d) $g'(z) = \dfrac{-3\sqrt[3]{2z + 3}}{2\sqrt{(3z + 2)^3}} + \dfrac{2}{3\sqrt{3z + 2}\,\sqrt[3]{(2z + 3)^2}}$

   (e) $F'(v) = -5v^4(v^5 - 32)^{-6/5} = \dfrac{-5v^4}{\sqrt[5]{(v^5 - 32)^6}}$

8. (a) $y' = \dfrac{12\sqrt{xy} + y}{6\sqrt{xy} - x}$

   (b) $y' = \dfrac{18x^{5/3}y^{2/3} + y}{12x^{2/3}y^{5/3} - x}$

9. (a) Se f é uma função par, temos a igualdade $f(-x) = f(x)$. Derivando ambos os membros em relação a x, temos $[f(-x)]' = f'(x)$. Por derivação em cadeia, aplicada ao primeiro membro, temos $f'(-x) \cdot (-x)' = f'(x)$, logo $-f'(-x) = f'(x)$, ou seja $f'(-x) = -f'(x)$. Concluímos então que se f é função par, sua derivada f' é função ímpar.