8. Diferenciais

Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável. Já vimos que se x_1 e x_2 pertencem ao domínio da f, então a diferença $x_2 - x_1$ é chamada incremento de x e denotada por Δx. Assim, $\Delta x = x_2 - x_1$. De modo análogo, o incremento correspondente a y é dado por $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$.

***Definição*:** Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável em x_1 e seja Δx um incremento de x.

(i) A diferencial de x é dada por $dx = \Delta x$.

(ii) A diferencial de y em x_0 é dada por $dy = f'(x_0)\, dx$.

Observe que $f'(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

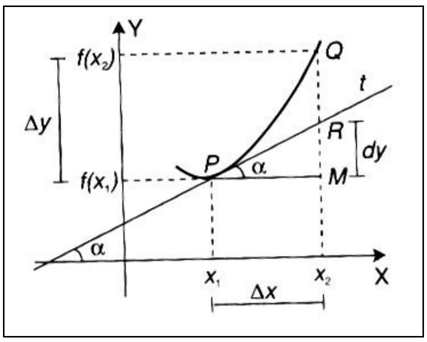
Assim, quando $\Delta x \approx 0$, $f'(x_0) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ e, conseqüentemente, $\Delta y \approx f'(x_0)\, \Delta x$, ou seja, $dy \approx \Delta y$, sempre que $\Delta x \approx 0$. Isso significa que, para pequenas variações em x, podemos usar a diferencial para avaliar a correspondente variação ocorrida em y.

Por outro lado, $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$. Logo, $dy \approx f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, ou seja,

$$f(x_1 + dx) \approx f(x_1) + f'(x_1)\, dx \text{ , sempre que } dx = \Delta x \approx 0.$$

Esta expressão é denominada aproximação linear de f em torno de x_1, pois, como podemos observar, se $x = x_1 + dx$, então $f(x_1) + f'(x_1)\, dx = f(x_1) + f'(x_1)\,(x - x_1)$ é a expressão da reta tangente ao gráfico de f em x_1. Isso significa que em uma vizinhança muito pequena de x_1, podemos representar a função f por sua reta tangente neste ponto, ou seja, f satisfaz $f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)\,(x - x_1)$.

Interpretação geométrica da diferencial:



Exemplos:

1) (a) Use a diferencial para aproximar a variação de *sen* θ, quando θ varia de 60^o para 61^0.

(b) Calcule *sen* 61^0 através da aproximação linear da função seno.

Solução:

(a) Seja $y = f(\theta) = sen\ \theta$. Então, $dy = f'(\theta)\ d\theta = cos\ \theta\ d\theta$.

No problema, temos: $\theta_1 = 60^o = \dfrac{\pi}{3}$ e $d\theta = 1^o = \dfrac{\pi}{180}$.

Logo, $dy = (cos\ \dfrac{\pi}{3})\ \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}0087$.

Assim, quando θ varia de 60^o para 61^0, provoca uma variação de 0,0087 em *sen* θ.

(b) A aproximação linear para $f(\theta) = sen\ \theta$ é dada por:

$f(\theta) = f(\theta_1 + \Delta\theta) \approx f(\theta_1) + df(\theta_1) = sen\ \theta_1 + (cos\ \theta_1)\mathrm{d}\theta$. Substituindo os respectivos valores, temos:

$$sen\ 61^0 \approx sen\ \frac{\pi}{3} + (cos\ \frac{\pi}{3})\ (\frac{\pi}{180}) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}0087 \approx 0{,}8747.$$

Observação: Usando uma calculadora obtemos *sen* 61^0 = 0,8746, ou seja, um erro da ordem de 0,0001, pelo fato de que a calculadora usa uma aproximação melhor que a linear.

2) Use a diferencial para aproximar o valor de $\sqrt{50}$.

Solução: Sejam $f(x) = \sqrt{x}$, $x_1 = 49$ e $dx = 1$. Então temos:

$$f(x) = f(x_1 + \Delta x) \approx f(x_1) + df(x_1) = \sqrt{x_1} + \frac{1}{2\sqrt{x_1}}dx = 7 + \frac{1}{14}\times 1 \approx 7{,}07143.$$

Observação: Calculado por uma calculadora obtemos 7,07106.

3) Mede-se como 12 cm o raio de um balão esférico, com erro máximo de ±0,06 cm. Aproxime o erro máximo no cálculo do volume do balão.

Solução:

Sejam r a medida do raio do balão e dr a medida do erro máximo cometido na medida de r. Então, quando r = 12 cm, temos dr = ±0,06 cm. Queremos determinar o erro cometido no cálculo do volume, o qual pode ser aproximado por dV, onde $V(r) = \dfrac{4\pi\, r^3}{3}$ é o volume da esfera. Porém,

$$dV = V\,'(r\,)\, dr = 4\,\pi\, r^2\, dr = 4\,\pi\,(12)^2\,(\pm 0{,}06) \approx \pm\, 108{,}57.$$

Portanto, o erro máximo no cálculo do volume, devido a um erro na medida do raio de ±0,06 cm, será de aproximadamente ±108,57 cm^3.

Observação: Embora o erro possa parecer muito grande, uma idéia melhor dele é dada pelo **erro relativo**, que é calculado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} \approx \frac{4\pi\, r^2 dr}{\dfrac{4\pi\, r^3}{3}} = 3\frac{dr}{r} = 3\frac{0{,}06}{12} \approx 3\times 0{,}005 = 0{,}015\,.$$

Assim, um erro de 0,5% no raio provoca um erro de 1,5% no volume (para mais ou para menos).

4) Uma baleia é avistada pela tripulação de um navio, que estima seu comprimento L em 10 m, com um erro máximo possível de 60 cm. Sabe-se que o peso W (em toneladas métricas) está relacionado com L pela fórmula W = 0,005823 $L^{3{,}18}$. Use diferenciais para aproximar o erro absoluto e o erro relativo na estimativa do peso da baleia.

Solução:

dW = (3,18) (0,005823) $L^{2{,}18}$ dL. Como L = 10 e dL = 0,6, temos

dW = (3,18) (0,005823) $10^{2{,}18}$ (0,6) ≈ 1,68 tons. métricas.

Portanto, o erro absoluto é de aproximadamente 1,68 tons. métricas.

O erro relativo é dado por

$$\frac{dW}{W} = \frac{(3{,}18)(0{,}005823)L^{2{,}18}dL}{0{,}005823L^{3{,}18}} = \frac{3{,}18dL}{L} = 3{,}18\frac{0{,}6}{10} = 3{,}18\times 0{,}06 \approx 0{,}19\,.$$

Assim, um erro de aproximadamente 6% na estimativa do comprimento acarreta um erro de aproximadamente 19% na estimativa do peso.

EXERCÍCIOS:

1) Encontre a aproximação linear das funções abaixo, nos pontos dados:

a) $f(x) = x^3, \quad x_0 = 1$

b) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = e^{-2x}, \quad x_0 = 0$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = -8$

2) Use diferenciais para estimar os valores solicitados:

a) $\sqrt{36{,}1}$

b) $\dfrac{1}{10{,}1}$

c) $cos\ 59^o$

d) ln 1,07

3) A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível em calcular o volume do cubo e a área de sua superfície.

4) O raio de um disco circular é 24 cm, com um possível erro de 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo na área do disco. Qual o erro relativo?

5) Quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo F (volume de sangue passando, por unidade de tempo, por um ponto dado) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso, ou seja, $F = kR^4$ (isso é conhecido como a Lei de Poiseuille). Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter do tipo balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue. Mostre que a variação relativa em F é cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo de sangue?