Universidade Salvador – UNIFACS
Cursos de Engenharia – Métodos Matemáticos Aplicados / Cálculo Avançado / Cálculo IV
Profa: Ilka Rebouças Freire

A Transformada de Laplace

Texto 03: Deslocamento sobre os eixos s e t. A Função Degrau Unitário.

A Transformada de funções periódicas. Aplicação.

Deslocamento sobre o eixo s.

Como vimos, a resolução de um problema de valor inicial pela transformada de Laplace se reduz a achar a transformada inversa de uma função F(s). Na prática, tais inversas são obtidas usando o método das frações parciais para converter F(s) a uma forma em que sua inversa pode ser reconhecida através das fórmulas da tabela.
Até agora vimos exemplos de equações diferenciais em que a solução pode ser obtida facilmente por outros métodos. Para conseguirmos aplicações em que a transformada de Laplace possa mostrar seu poder real temos que estabelecer mais alguns resultados das transformadas

Teorema: Deslocamento sobre o eixo s :

Se $L[f] = F(s)$ para algum $s > s_o$, então $L[e^{at} f(t)] = F(s - a)$ para $s - a > s_o$.

D] $L[e^{at}f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = L[f(t)](s-a) = F(s-a)$

Observação: A substituição de s por s – a na transformada (deslocamento sobre o eixo s) corresponde à multiplicação da função original por e^{at}.

Exemplo: Como aplicação imediata deste resultado podemos deduzir as seguintes transformadas da tabela:

1) $L[e^{-2t}\cos 3t] = F(s + 2)$, sendo $F(s) = L[\cos 3t] = \dfrac{s}{s^2+9}$. Logo, $L[e^{-2t}\cos 3t] = \dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}$

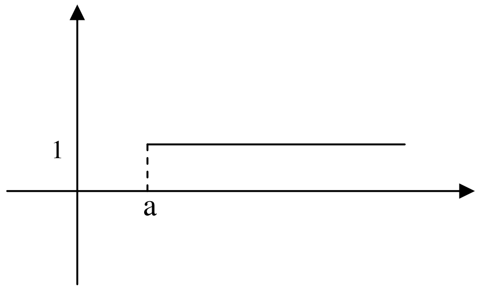
Generalizando: $L[e^{at}\cos(wt)] = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$

2) $L[te^{at}] = F(s - a)$, sendo $F(s) = L[\,t\,] = \dfrac{1}{s^2}$. Logo, $L[te^{at}] = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

A Função Degrau Unitário – Função de Heaviside

Definição: A função **degrau unitário** $u_a(t)$ é definida como segue:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0; & \text{se } t < a \\ 1; & \text{se } t \geq a \end{cases} \qquad a \geq 0$$



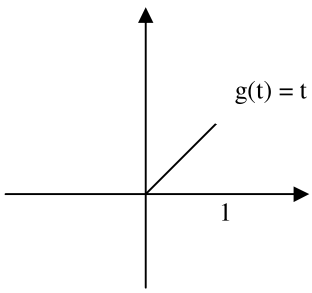
- A função degrau unitário também é chamada de função de Heaviside em homenagem ao engenheiro eletrônico inglês Oliver Heaviside (1850-1925) que usou originalmente a transformada de Laplace como ferramenta para resolver equações diferenciais provenientes de problemas relacionados com linhas de transmissão.
- A função degrau unitário também pode ter a notação $u(t - a)$.

Exemplos:

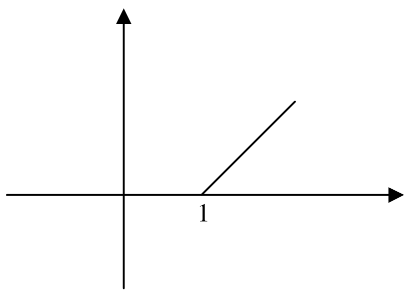
1) $u_1(t) = \begin{cases} 0; & \text{se } t < 1 \\ 1; & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$; **2)** $u_3(t) = \begin{cases} 0; & \text{se } t < 3 \\ 1; & \text{se } t \geq 3 \end{cases}$

Mais geralmente, a função $f(t) = u_a(t)g(t-a) = \begin{cases} 0; & \text{se } t < a \\ g(t-a); & \text{se } t \geq a \end{cases}$ descreve a função obtida "transladando" a função g(t) **a** unidades para a direita e depois anulando a parte à esquerda de **a**. Tais funções aparecem na prática como impulsos com retardamento em sistemas físicos, isto é, impulsos ocorrendo no instante t = a, e não t = 0.

Exemplo: $f(t) = \begin{cases} 0; & \text{se } t < 1 \\ t - 1; & \text{se } t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(t) = (t - 1)\, u_1(t)$



$\rightarrow$



Exercício: Mostre que $L[\ u_a(t)\ ] = \dfrac{e^{-as}}{s}$

Solução: $L[u_a(t)] =$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} u_a(t)dt = \int_a^{+\infty} e^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^b = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-sa}}{s}\right] = \frac{e^{-sa}}{s} \quad \text{se } s > 0$$

A função degrau pode ser usada para escrever funções definidas por várias sentenças de forma compacta:

- Se $f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{se} \quad 0 \le t < a \\ h(t) & \text{se} \quad t \ge a \end{cases}$ então $f(t) = g(t) - g(t)\,u_a(t) + h(t)u_a(t)$

De fato: i) se $0 \le t < a$ temos $f(t) = g(t) - g(t).0 + h(t).0 = g(t)$;
ii) se $t \ge a$ temos $f(t) = g(t) - g(t).1 + h(t).1 = h(t)$;

- Se $f(t) = \begin{cases} 0; & \text{se} \quad 0 \le t < a \\ g(t); & \text{se} \quad a \le t < b \\ 0; & \text{se} \quad t \ge b \end{cases}$ então $f(t) = g(t)\,(\,u_a(t) - u_b(t)\,)$

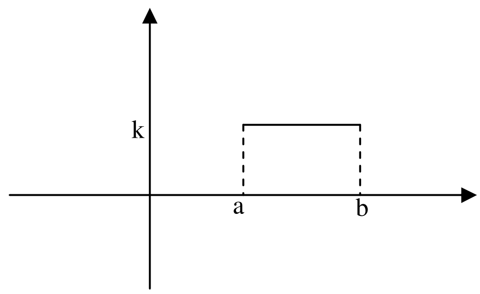
Exercício: Expresse as seguintes funções em termos de $u_a(t)$ e calcule $L[\ f(t)]$.

1) $f(t) = \begin{cases} 2; & 0 \le t < 3 \\ -2; & t \ge 3 \end{cases}$

Solução: $f(t) = 2 - 2u_3(t) - 2u_3(t) = 2 - 4u_3(t)$

$L[f(t)] = 2L[1] - 4L[u_3(t)] = \dfrac{2}{s} - \dfrac{4e^{-3s}}{s}$

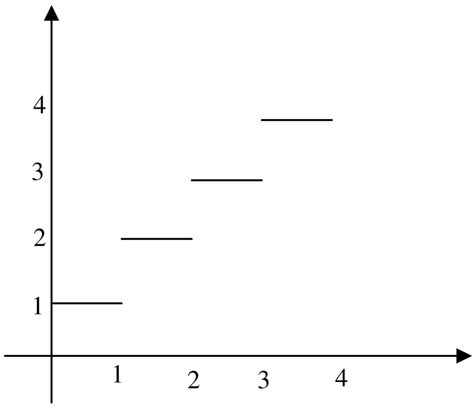
2) $f(t) = \begin{cases} 0; & \text{se} \quad 0 \le t < a \\ k; & \text{se} \quad a \le t < b \\ 0; & \text{se} \quad t \ge b \end{cases}$ (pulso retangular)



Solução: $f(t) = k(u_a(t) - u_b(t))$

$L[f] = k(L[u_a(t)] - L[u_b(t)]) = k\left(\dfrac{e^{-as}}{s} - \dfrac{e^{-bs}}{s}\right) = \dfrac{k}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$

3)



$f(t) = n + 1$, se $n < t < n+1$

Solução: $f(t) = u_o(t) + u_1(t) + u_2(t) + \ldots \Rightarrow L[f(t)] = L[u_o(t) + u_1(t) + u_2(t) + \ldots] =$

$L[u_o(t)] + L[u_1(t)] + L[u_2(t)] + \ldots =$

$$= \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \ldots = \frac{1}{s}(1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \ldots) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1-e^{-s}}\right)$$

A expressão entre parênteses acima corresponde à soma de uma PG infinita de razão e^{-s}.

Deslocamento sobre o eixo t

Teorema: Deslocamento sobre o eixo t: Seja $f(t) = u_a(t)\, g(t - a)$, $a \geq 0$ uma função contínua por partes e de ordem exponencial. Então $L[f] = e^{-as} L[g(t)]$

D] $L[f] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_a^{+\infty} e^{-st} g(t-a)dt$. Fazendo a substituição: $t - a = u$; $dt = du$, obtemos:

$$L[f] = \int_a^{+\infty} e^{-s(u+a)} g(u)du = e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-su} g(u)du = e^{-sa} L[g]$$

Observações:

- Por motivos físicos, o fator e^{-as} é chamado de fator de retardamento
- A substituição em $f(t)$ de t por $t - a$ corresponde aproximadamente à multiplicação da transformada $F(s)$ por e^{-as}

Exercício: Calcule L[f(t)] para as seguintes funções

1) $f(t) = (t-2)u_2(t)$

Solução: Neste caso a função g(t – a) = g(t – 2) = t – 2. Logo, g(t) = t e $L[g(t)] = L[t] = \frac{1}{s^2}$.

Aplicando o Teorema do deslocamento L [f] $= e^{-as}$ L[g(t)] = $e^{-2s}\frac{1}{s^2}$

2) $f(t) = e^{t-1}u_1(t)$

Solução: Neste caso a função g(t–a) = g(t–1) = e^{t-1}. Logo, g(t) = e^t; a = 1 e $L[g(t)] = L[e^t] = \frac{1}{s-1}$.

Aplicando o Teorema do deslocamento L [f] $= e^{-as}$ L[g(t)] = $e^{-s}\frac{1}{s-1}$

3) $f(t) = sen(t-\pi)u_\pi(t)$

Solução: Neste caso a função $g(t-a) = sen(t-\pi)$. Logo, g(t) = sent; a = π e $L[g(t)] = L[sent] = \frac{1}{s^2+1}$.

Aplicando o Teorema do deslocamento L [f] $= e^{-as}$ L[g(t)] = $e^{-\pi s}\frac{1}{1+s^2}$

4) $f(t) = e^{2t}u_1(t)$

Solução: Neste caso devemos deslocar a função exponencial $f(t) = e^{2t}$ de uma unidade para aplicarmos a Tabela. Assim,

$f(t) = e^{2t}u_1(t) = e^{2(t-1+1)}u_1(t) = e^{2(t-1)}e^2u_1(t)$. A função $g(t-1) = e^{2(t-1)}$. Logo, $g(t) = e^{2t}$; a = 1

e $L[g(t)] = L[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}$. Aplicando o Teorema do deslocamento L [f] $= e^{-as}$ L[g(t)] = $L[e^2.e^{2(t-1)}u_1(t)] = e^2e^{-s}\frac{1}{s-2} = \frac{e^{2-s}}{s-2}$

5) $f(t) = \begin{cases} t; & \text{se} \quad 0 \le t < 2 \\ 0; & \text{se} \quad t \ge 2 \end{cases}$

Solução: Escrevendo f(t) em termo da função degrau temos $f(t) = t - tu_2(t)$

$L[f] = L[t] - L[tu_2(t)]$. Para aplicarmos o Teorema escrevemos $tu_2(t) = (t - 2 + 2)\,u_2(t) =$
$= (t - 2)\,u_2(t) + 2\,u_2(t)$. Assim, usando o resultado do exercício 1

$L[f] = L[t] - L[(t-2)u_2(t) + 2u_2(t)] = L[t] - L([(t-2)\,u_2(t)] - 2L[u_2(t)] = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-2s}}{s^2} - \dfrac{2e^{-2s}}{s}$

O deslocamento sobre o eixo t no cálculo das Transformadas Inversas

Para aplicar o Teorema do deslocamento sobre o eixo t ao cálculo da transformada inversa podemos reescrevê-lo como:

$$L[u_a(t)\,g(t-a)] = e^{-as} L[g(t)] \Rightarrow u_a(t)\,g(t-a) = L^{-1}[e^{-as} L[g(t)]] \Rightarrow$$

$$L^{-1}[e^{-as} G[s]] = u_a(t)\,g(t-a), \text{ sendo } G(s) = L[g(t)]$$

Exercício: Encontre f(t), sabendo que F(s) = L[f(t)] nos seguintes casos:

1) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(s+2)}$

Solução: Neste caso a = 1 e $G(s) = \dfrac{1}{s(s+2)} = L[\dfrac{1-e^{-2t}}{2}]$. Temos que $L^{-1}[\dfrac{e^{-s}}{s(s+2)}] =$ $u_1(t)g(t-1)$, sendo $g(t) = \dfrac{1-e^{-2t}}{2}$. Logo, $f(t) = u_1(t)(\dfrac{1-e^{-2(t-1)}}{2})$ que pode ser reescrita como uma função de duas sentenças, $f(t) = \begin{cases} 0; & 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{1-e^{-2(t-1)}}{2}; & t > 1 \end{cases}$

2) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2(s+4)}$

Solução: Neste caso a = 2 e $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+4)}$. Seja $g(t) = L^{-1}[\dfrac{1}{s^2(s+4)}]$. Para encontrarmos g(t) usamos o método das frações parciais:

$\frac{1}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}$ $\Rightarrow 1 = As(s+4) + B(s+4) + Cs^2$. Por comparação de coeficientes ou atribuindo-se valores a s encontramos $A = -\frac{1}{16}$, $B = \frac{1}{4}$ e $C = \frac{1}{16}$.

$$g(t) = L^{-1}[-\frac{1}{16}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{s+4}] = -\frac{1}{16} + \frac{t}{4} + \frac{e^{-4t}}{16}.$$

Logo f(t) = $L^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s^2(s+4)}] = g(t-2)u_2(t)$, sendo $g(t) = -\frac{1}{16} + \frac{t}{4} + \frac{e^{-4t}}{16}$.

Assim, $L^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s^2(s+4)}] = \left(-\frac{1}{16} + \frac{t-2}{4} + \frac{e^{-4(t-2)}}{16}\right)u_2(t)$

3) $F(s) = \frac{(3s+3)e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}$

Solução: Neste caso a = π e $G(s) = \frac{3s+3}{s^2+2s+2}$. Seja $g(t) = L^{-1}[\frac{3s+3}{s^2+2s+2}]$.

$g(t) = L^{-1}[\frac{3(s+1)}{(s+1)^2+1}]$. Usando Tabela no 16 obtemos $g(t) = 3e^{-t}\cos t$.

Logo f(t) = $g(t-\pi)u_\pi(t) = 3e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi)\,u_\pi(t)$,

A transformada de uma função periódica

O Teorema a seguir serve para reduzir o cálculo da transformada de Laplace de uma função periódica ao cálculo da integral num intervalo finito.

Teorema: Se f é uma função de ordem exponencial, periódica de período p, então

$$L[f] = \frac{\int_0^p e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-ps}}$$

D] L[f] = $\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^p e^{-st}f(t)dt + \int_p^{2p} e^{-st}f(t)dt + ... + \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st}f(t)dt + ...$

Fazendo t = x + np na (n+1)-ésima integral da série acima ficamos com

$\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)dt = \int_0^p e^{-s(x+np)} f(x+np)dx = e^{-snp}\int_0^p e^{-sx} f(x)dx$ (Usamos o fato que f é periódica de período p, logo f(x+np) = f(x))

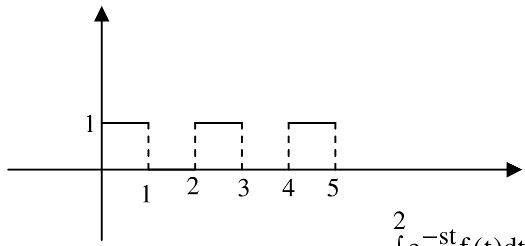
Usando este fato em cada uma das integrais acima, ou seja, para n = 0, 1, 2, etc..., obtemos: L[f] =
$\int_0^p e^{-sx} f(x)dx + e^{-sp}\int_0^p e^{-sx} f(x)dx + ... + e^{-snp}\int_0^p e^{-sx} f(x)dx + ... = (1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + ...)\int_0^p e^{-sx} f(x)dx =$

A expressão que está entre parênteses corresponde à soma da série geométrica de razão e^{-sp} que é dada por $\dfrac{1}{1-e^{-sp}}$, o que resulta $L[f] = \dfrac{\int_0^p e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-ps}}$.

Exercícios:

1) Encontre a transformada de Laplace das seguintes funções:

a)

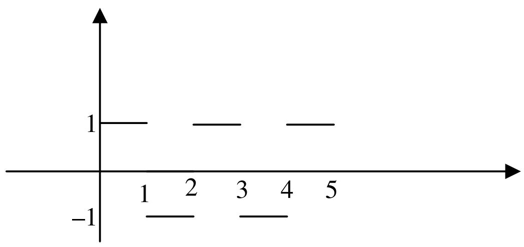


(função onda quadrada)

Solução: f é periódica de período 2, então $L[f] = \dfrac{\int_0^2 e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-2s}} =$

$$\frac{\int_0^1 e^{-st}dt}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 e^{-st}dt\right) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^1 = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{1-e^{-s}}{s}\right] = \frac{1}{s(1+e^{-s})}$$

b)

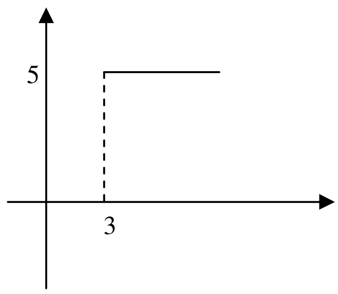


Solução: f é periódica de período 2, então $L[f] = \dfrac{\int_0^2 e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-2s}} =$

$$\frac{\int_0^1 e^{-st}dt - \int_1^2 e^{-st}dt}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 e^{-st}dt - \int_1^2 e^{-st}dt\right) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left([-\frac{e^{-st}}{s}]_0^1 - [-\frac{e^{-st}}{s}]_1^2\right) =$$

$$\frac{1}{1-e^{-2s}}\left([\frac{1-e^{-s}}{s}] - [\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}]\right) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s}\right) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\frac{(1-e^{-s})^2}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$$

2) Use a transformada de Laplace para determinar a carga num capacitor em um circuito em série RC quando q(0) = 0; R = 2,5 ohms, C = 0,08 farad e E(t) é a voltagem dada no gráfico ao lado:



Solução: A equação para a carga em um capacitor, em um circuito em série RC, é dada por

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Substituindo os valores dados e observando que E(t) = 5 $u_3(t)$ obtemos:

$$\frac{25}{10}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{8.10^{-2}}q = 5u_3(t) \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} + 5q = 2u_3(t) \quad (\text{ I })$$

Suponhamos que a transformada da solução q(t) seja L[q(t)] = Q. Usando que q(0) = 0 e que L(q´) = sL[q] – q(0), obtemos L[q´] = sQ

Aplicando a transformada nos dois lados da equação (I):

$L[q'] + 5L[q] = 2L[u_3(t)] \Rightarrow sQ + 5Q = 2\dfrac{e^{-3s}}{s} \Rightarrow (s+5)Q = 2\dfrac{e^{-3s}}{s} \Rightarrow Q = 2\dfrac{e^{-3s}}{s(s+5)}$

A questão agora é, a partir de Q, obter a transformada inversa, ou seja, q(t).

Considerando $G(s) = \dfrac{2}{s(s+5)}$ e usando a Tabela nº 21: $g(t) = 2\dfrac{1-e^{-5t}}{5}$

Usando o Teorema do deslocamento sobre o eixo t: $Q = L[q] = L[\,u_3(t)g(t-3)\,]$, sendo $g(t) = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})$.

A solução fica portanto $q(t) = u_3(t)g(t-3) = u_3(t)(\frac{2}{5}(1 - e^{-5(t-3)})$ =

$$q(t) = \begin{cases} 0; & \text{se } t < 3 \\ \frac{2}{5}(1 - e^{-5(t-3)}); & \text{se } t \geq 3 \end{cases}$$

Referências Bibliográficas:

1. Kreyszig, Erwin – Matemática Superior - vol 1
2. Zill/Cullen – Equações Diferenciais - vol 1
3. Kreider/Kuller/Ostberg – Equações Diferenciais