Universidade Salvador – UNIFACS
Cursos de Engenharia – Métodos Matemáticos Aplicados / Cálculo Avançado / Cálculo IV
Profa: Ilka Rebouças Freire

A Transformada de Laplace

Texto 02: A Transformada Inversa. A Derivada da Transformada. Aplicação na Resolução de Equações Diferenciais

A Transformada Inversa

Como vimos a Transformada de Laplace é um operador linear entre dois espaços de funções. Duas questões então são colocadas:

- A aplicação L é injetora? Isto é, L[f] = L[g] implica que f = g?
- A aplicação L é sobrejetora? Isto é, para toda função F(s), existe f tal que L[f(t)] = F(s)?

Para responder à 1ª questão faremos as seguintes considerações:

Se f e g são funções que diferem apenas nos seus pontos de descontinuidades, então L[f(t)] = L[g(t)], embora $f \neq g$. Duas tais funções são "quase idênticas" e neste caso, para fins práticos, podemos considerar que L é injetora. O teorema a seguir nos garante isso;

Teorema de Lerch: Sejam f e g funções contínuas por partes de ordem exponencial e suponhamos que exista um número real s_o tal que L[f(t)](s) = L[g(t)](s) para todo $s > s_o$. Então, com a possível exceção dos pontos de descontinuidade, f(t) = g(t) para todo t > 0.

Pelo Teorema temos que se a equação L[f(t)] = F(s) pode ser resolvida em relação a f(t) então a solução é essencialmente única, diferindo apenas em pontos de descontinuidades.
Esta solução é chamada de **Transformada Inversa de Laplace** da função F(s) e é denotada por L^{-1}[(F(s))]. Ela é caracterizada pela propriedade:

$$L^{-1}[(F(s))] = f(t) \Leftrightarrow L[f(t)] = F(s)$$

- A função y = f(t) é também chamada de **função inicial.**

A determinação da função inicial terá um papel fundamental na resolução das equações diferenciais.

Quanto à nossa segunda questão a resposta é não, ou seja, a equação L[f(t)] = F(s) não tem solução para toda função F(s).
Isto pode ser traduzido no seguinte resultado:

Teorema: Se f(t) é uma função de ordem exponencial, então $\lim\limits_{s \to +\infty} L[f] = \lim\limits_{s \to +\infty} F(s) = 0$

Como consequência desse Teorema podemos afirmar que funções tais como: 1, s, sens, não têm transformada inversa, pois nenhuma delas tende a zero, quando s tende a infinito.

No decorrer dos exemplos dados até aqui, já obtivemos a transformada de Laplace de algumas funções que podem ser resumidas na tabela

Vamos trabalhar com uma tabela mais completa (ver no final do texto) em que alguns resultados serão deduzidos posteriormente no decorrer do desenvolvimento da teoria e outros serão assumidos, sem demonstração.

Através da utilização desses resultados e das propriedades vistas podemos encontrar a função inicial.

Exemplo: Determine f(t) conhecendo-se L[f(t)](s) = F(s) nos seguintes casos:
(Use a Tabela anexa)

1. $F(s) = \frac{1}{s^3}$

Usamos a n° 3 da Tabela para n = 2, fazendo o seguinte ajuste:

$$F(s) = L[f(t)] = \frac{1}{s^3} = \frac{1}{2}\frac{2!}{s^3} = \frac{1}{2}L[t^2] = L[\frac{t^2}{2}] \Rightarrow f(t) = \frac{t^2}{2}$$

2. L[f](s) = F(s) = $\frac{1}{s^2+9}$

Usando a Tabela (06) para k = 3 obtemos:

$$L[f(t)](s) = \frac{1}{s^2+9} = \frac{1}{s^2+3^2} = \frac{1}{3}\frac{3}{s^2+3^2} = \frac{1}{3}L[\operatorname{sen} 3t] = L[\frac{\operatorname{sen} 3t}{3}] \Rightarrow f(t) = \frac{\operatorname{sen} 3t}{3}$$

3. L[f](s) = F(s) = $\frac{3}{s+\pi}$

Usando a n° 10 da Tabela para a = $-\pi$

$$F(s) = \frac{3}{s+\pi} = 3\frac{1}{s-(-\pi)} = 3L[e^{-\pi t}] = L[3e^{-\pi t}] \Rightarrow f(t) = 3e^{-\pi t}$$

4. $L[f](s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s^3}$, a, b e c constantes

$L[f] = aL[1] + bL[t] + (c/2!)L[t^2] = L[\ a + bt + (c/2!)t^2] \Rightarrow f(t) = a + bt + (c/2!)t^2$

5. $L[f](s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

Usando o Método das Frações Parciais para a resolução de integrais racionais temos que

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}\Rightarrow A=1 \text{ e } B=-1$$. Assim, usando nº 10 da Tabela:

$$L[f](s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s-(-1)}-\frac{1}{s-(-2)}=L[e^{-t}]-L[e^{-2t}]=L[e^{-t}-e^{-2t}]$$

Logo, $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

O mesmo resultado poderia ser obtido usando-se a Tabela nº 21 para a = – 1 e b = – 2

6. $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)(s+3)}$

Observemos que este caso não aparece na Tabela. Usamos a seguinte decomposição

$$F(s)=\frac{1}{s(s-1)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s+3}$$. Finalize…..

7. $L[f(t)]=F(s)=\dfrac{s-1}{s^2(s+1)}$

Usando a decomposição em frações parciais obtemos $\dfrac{s-1}{s^2(s+1)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{C}{s+1}$

Calculando as constantes: A = 2; B = – 1 e C = – 2. Logo,

$$L[f(t)] = \frac{s-1}{s^2(s+1)}=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s+1}\Rightarrow$$

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s+1}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-2L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=2-t-2e^{-t}$$

8. $L[f(t)]=F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+9)}$

Usando a decomposição em frações parciais obtemos $\dfrac{1}{s(s^2+9)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{Bs+C}{s^2+9} \Rightarrow$

$1=A(s^2+9)+(Bs+C)s=(A+B)s^2+Cs+9A$. Comparando os coeficientes:

$A=\dfrac{1}{9}$; $B=-\dfrac{1}{9}$ e $C=0$. Logo, $\dfrac{1}{s(s^2+9)}=\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{9}\dfrac{s}{s^2+9}$.

Assim, f(t) = $L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+9)}] = \frac{1}{9}L^{-1}[\frac{1}{s}] - \frac{1}{9}L^{-1}[\frac{s}{s^2+9}] = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t$

O mesmo resultado poderia ser obtido usando-se Tabela 23 para k = 3.

L[f(t)]= $F(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{9}\frac{9}{s(s^2+9)} = \frac{1}{9}L[1-\cos 3t] = L[\frac{1-\cos 3t}{9}]$

Observação: Apesar de alguns resultados já estarem tabelados é importante saber o método das frações parciais pois nem sempre encontramos o que precisamos na Tabela

9. $L[f(t)] = F(s) = \frac{1}{(s-3)(s^2+9)}$

$F(s) = \frac{1}{(s-3)(s^2+9)} = \frac{A}{s-3} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$ ....(Finalize!!)

10) $L[f(t)] = F(s) = \frac{1}{(s^2+4s+5)}$

Temos o caso em que o denominador é um trinõmio do 2º grau irredutível (raízes complexas).

Completando o quadrado: $F(s) = \frac{1}{(s^2+4s+5)} = \frac{1}{(s+2)^2+1}$

Utilizamos a tabela 15 para a = –2 e k = 1 . Assim,

$f(t) = e^{-2t}\text{sen}t$

A Transformada de Laplace da Derivada

Para aplicarmos a Transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais necessitamos de uma fórmula para a transformada da derivada. Esta fórmula é muito importante e exprime a transformada da derivada de f em termos de L[f] e do comportamento de f no zero.

Este resultado depende, por sua vez, do seguinte fato que enunciaremos como um Lema, sem demonstração:

Lema: Toda função que é contínua em $]0, +\infty[$ e tem derivada contínua e de ordem exponencial é, ela própria, de ordem exponencial.

O resultado acima nos permite deduzir a existência de L[f], da continuidade de f e a existência de L[f ´].

Teorema: Sejam f contínua, f ´ contínua por partes e de ordem exponencial em $[0, +\infty[$. Então L [f ´] = s L[f] – f(0).

D] $L[f'] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt$. Usando integração por partes obtemos $\begin{cases} u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}dt \\ dv = f'(t)dt \Rightarrow v = f(t) \end{cases}$

Assim, $\int e^{-st} f'(t)dt = f(t)e^{-st} + s\int e^{-st} f(t)dt$ e, portanto,

$$L[f'] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = \lim_{b \to +\infty} [f(t)e^{-st}]_0^b + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{b \to +\infty} f(b)e^{-sb} - f(0) + sL[f(t)]$$

Pelo Lema enunciado temos que f é de ordem exponencial, logo $\lim_{b \to +\infty} f(b)e^{-sb} = 0$, se s é suficientemente grande. Concluímos, portanto, que L [f ´] = s L[f] – f(0).

Observação: Se f tem uma descontinuidade de salto na origem o resultado vale e, em lugar de f(0) na fórmula, tomamos $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$

Exercício: Usando a fórmula da transformada de f´ deduza que L[f ´´] = s^2L[f] – sf(0) – f ´(0)

Solução: L[f ´´] L[(f ´)´]= sL[f ´] – f ´(0) = s (s L[f] – f(0)) – f ´(0) = s^2L[f] – sf(0) – f ´(0)

Generalização: Se f, f´, f´´,..., $f^{(n-1)}$ são contínuas em]0, +∞[e $f^{(n)}$ é contínua por partes e de ordem exponencial, então $L[f^{(n)}] = s^nL[f] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f\,'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$.

Aplicação da Transformada de Laplace na Resolução de Equações Diferenciais

Com a teoria desenvolvida até aqui podemos ilustrar como funciona o método das transformadas de Laplace na resolução de equações diferenciais.

O processo de resolução consiste de três etapas principais:

1ª) Um problema "difícil" é transformado numa equação simples (equação subsidiária)

2ª) Resolve-se a equação subsidiária através de algebrismo.

3ª) A solução da equação subsidiária é transformada novamente para se obter a solução do problema dado.

Exemplo: Use transformadas de Laplace para resolver os seguintes problemas de valor inicial

1) $y'' + 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 3$ e $y'(0) = 1$

Solução: Seja y(t) a solução da equação diferencial e L[y(t)] = Y(s) a sua transformada de Laplace. Usando as fórmulas das derivadas e as condições iniciais obtemos:

$L[y'] = s\,L[y] - y(0) = sY - 3$ (1)

$L[y''] = s^2L[y] - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 3s - 1$ (2)

Usando a linearidade da transformada e (1) e (2):

$L[y'' + 4y' + 3y] = L[0] \Rightarrow L[y''] + 4L[y'] + 3L[y] = 0 \Rightarrow s^2Y - 3s - 1 + 4(sY - 3) + 3Y = 0$

$\Rightarrow s^2Y + 4sY + 3Y - 3s - 13 = 0$ (esta equação é chamada de **equação subsidiária**)

$\Rightarrow Y(s^2 + 4s + 3) = 3s + 13$

$\Rightarrow Y = \dfrac{3s+13}{s^2+4s+3} = \dfrac{3s+13}{(s+3)(s+1)}$ (esta é a transformada inversa da solução, $Y = L^{-1}[y]$)

Para encontrarmos y(t), usamos os procedimentos já vistos

$Y = \dfrac{3s+13}{(s+3)(s+1)} = \dfrac{5}{s+1} - \dfrac{2}{s+3}$ (método das frações parciais)

Por outro lado, sabemos que $\dfrac{1}{s+3} = L[e^{-3t}]$ e $\dfrac{1}{s+1} = L[e^{-t}]$

Assim, $Y = L[y] = L[5e^{-t} - 2e^{-3t}]$ e, portanto a solução é $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}$.

2) $y'' - y = 1$; $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

Solução: Seja y(t) a solução da equação diferencial e L[y(t)] = Y(s) a sua transformada de Laplace. Usando as fórmulas das derivadas e as condições iniciais obtemos:

$L[y''] = s^2L[y] - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 1$ (1)

Usando a linearidade da transformada e (1) :

$L[y'' - y] = L[1] \Rightarrow L[y''] - L[y] = L[1] \Rightarrow s^2Y - 1 - Y = \frac{1}{s}$ (equação subsidiária)

$\Rightarrow \quad Y(s^2 - 1) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{1+s}{s} \Rightarrow Y = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ (Use o método das frações parciais para fazer a decomposição)

Temos assim que $Y = L[y] = L[e^t] - L[1] = L[e^t - 1] \Rightarrow y(t) = e^t - 1$

3. $y'' + y = t$; $y(0) = -1$ e $y'(0) = 3$

Solução: Seja y(t) a solução da equação diferencial e L[y(t)] = Y(s) a sua transformada de Laplace. Usando as fórmulas das derivadas e as condições iniciais obtemos:

$L[y''] = s^2L[y] - sy(0) - y'(0) = s^2Y + s - 3$ (1)

Usando a linearidade da transformada e (1) :

$L[y'' + y] = L[t] \Rightarrow L[y''] + L[y] = L[t] \Rightarrow s^2Y + s - 3 + Y = \frac{1}{s^2}$ (equação subsidiária)

$$\Rightarrow Y(s^2 + 1) = \frac{1}{s^2} - s + 3 \Rightarrow Y = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1}$$

Consultando a Tabela de Transformadas temos que:

$$L[kt - \text{sen}(kt)] = \frac{k^3}{s^2(s^2+k^2)} \Rightarrow \frac{1}{s^2(s^2+1)} = L[t - \text{sen}\, t]$$

$$L[\cos(kt)] = \frac{s}{s^2+k^2} \Rightarrow \frac{s}{s^2+1} = L[\cos t] \quad \text{e}$$

$$L[\text{sen}(wt)] = \frac{k}{s^2+k^2} \Rightarrow \frac{1}{s^2+1} = L[\text{sent}] \quad \text{Assim,}$$

$$Y = L[y] = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1} = L[t - \text{sen}\, t] - L[\cos t] + 3L[\text{sen}\, t] = L[t - \text{sen}\, t - \cos t + 3\,\text{sen}\, t]$$

$\Rightarrow y(t) = t + 2\text{sent} - \cos t$

Referências Bibliográficas: 1. Kreyszig, Erwin – Matemática Superior - vol 1

2. Zill/Cullen – Equações Diferenciais - vol 1

3. Kreider/Kuller/Ostberg – Equações Diferenciai

TABELA DE ALGUMAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	f(t)	L[f(t)] = F(s)		f(t)	L[f(t)] = F(s)
01	1	$\frac{1}{s}$	17	$e^{at}senh(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2-k^2}$
02	T	$\frac{1}{s^2}$	18	$e^{at}\cosh(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$
03	t^n, n inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	19	t sen(kt)	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
04	$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	20	t cos(kt)	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
05	$t^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	21	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
06	sen(kt)	$\frac{k}{s^2+k^2}$	22	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
07	cos(kt)	$\frac{s}{s^2+k^2}$	23	$1-\cos(kt)$	$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
08	$sen^2(kt)$	$\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$	24	$kt-sen(kt)$	$\frac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
09	$\cos^2(kt)$	$\frac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$	25	$\frac{asen(bt)-bsen(at)}{ab(a^2-b^2)}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
10	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	26	$\frac{\cos(bt)-\cos(at)}{(a^2-b^2)}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
11	Senh(kt)	$\frac{k}{s^2-k^2}$	27	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
12	Cosh(kt)	$\frac{s}{s^2-k^2}$	28	$f(t-a)u_a(t)$	$e^{-as}F(s)$
13	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	29	$u_a(t)=u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
14	t^ne^{at} n inteiro positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	30	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
15	$e^{at}sen(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	31	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
16	$e^{at}\cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	32	$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(F(s))$

$$f(t)=\begin{cases} g(t); & 0\le t<a \\ h(t); & t\ge a\end{cases}$$

$$f(t)=g(t)-u_a(t)g(t)+u_a(t)h(t)$$

$f(t)=\begin{cases}0; & 0\le t<a\\ g(t); & a\le t<b\\ 0; & t\ge b\end{cases}$	$f(t)=g(t)\left(u_a(t)-u_b(t)\right)$