Universidade Salvador – UNIFACS
Cursos de Engenharia – Métodos Matemáticos Aplicados / Cálculo Avançado / Cálculo IV
Profa: Ilka Rebouças Freire

A Transformada de Laplace

Texto 01: Introdução. Definição. Condições de Existência. Propriedades.

Introdução

A Transformada de Laplace é um método de resolução de equações diferenciais e dos correspondentes problemas de valor inicial que reduz a questão da resolução de uma equação diferencial a um problema algébrico. Tem a vantagem de resolver diretamente os problemas, isto é, os problemas de valor inicial podem ser resolvidos sem que se determine inicialmente uma solução geral. Além disso, as equações não-homogêneas são resolvidas sem ter que primeiro encontrar a solução das homogêneas correspondentes.

Este método é bastante utilizado em problemas de Engenharia, principalmente em problemas em que uma força de propulsão (mecânica ou elétrica) tem descontinuidades: por exemplo, atua em curto intervalo de tempo ou é periódica mas não é seno ou cosseno.

O método foi desenvolvido por Pierre Simon de Laplace (1749-1827), grande matemático francês que desenvolveu os fundamentos da teoria do potencial e deu grandes contribuições à Mecânica Celeste e à Teoria das Probabilidades.

Definição: Seja f(t) uma função real no intervalo $[0, +\infty[$ e consideremos a integral imprópria $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ onde s é uma variável real. Se a integral converge para certos valores de s , então define uma função de s chamada de **Transformada de Laplace** de f e denotada por L[f] (s) = F(s) = $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$. A operação realizada sobre f(t) é chamada de transformação de Laplace.

Observações:

- O uso da letra t em lugar de x como variável independente é uma convenção praticamente universal quando se define a Transformada de Laplace e tem como origem o fato de que na grande maioria dos problemas práticos com valor inicial a variável independente ser o tempo.

- Uma vez que valores negativos do tempo são usualmente excluídos restringimos o estudo ao eixo t não negativo, isto é, $t \in [0, +\infty[$.

Exemplo: Determine a transformada de Laplace das seguintes funções:

1. $f(t) = 1; \quad t \geq 0$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-e^{-sb}+1}{s}\right] = \frac{1}{s};$$

Assim, $L[1]\,(s) = \frac{1}{s}$ para $s > 0$.

Observemos que a integral converge para valores de $s > 0$.

2. $f(t) = t; \; t > 0$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt =$$

$$\int_0^{+\infty} te^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b te^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{s^2};$$

Observemos que $\lim_{b\to+\infty} \frac{be^{-sb}}{s} = \lim_{b\to+\infty} \frac{b}{se^{sb}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{s^2e^{sb}} = 0$ (se $s > 0$) (Usando L´Hospital na variável b)

Assim, $L[t] = F(s) = \frac{1}{s^2}$ se $s > 0$ (condição para a convergência da integral)

3. $f(t) = t^n$; n inteiro positivo

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st}dt$$

Vamos inicialmente usar partes para calcular a integral indefinida correspondente:

$$\int t^n e^{-st}dt : \begin{cases} u = t^n \Rightarrow du = nt^{n-1}dt \\ dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = \dfrac{-e^{-st}}{s} \end{cases} \Rightarrow \int t^n e^{-st}dt = \frac{-t^n e^{-st}}{s} + \frac{n}{s}\int t^{n-1}e^{-st}dt$$

Temos assim que:

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty} [\frac{-t^n e^{-st}}{s}]_0^b + \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty} [\frac{-b^n e^{-sb}}{s}] + \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-st}dt =$$

$$\frac{n}{s}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}L[t^{n-1}].$$

Observação: $\lim_{b\to+\infty} [\frac{-b^n e^{-sb}}{s}] = 0$.

Isto pode ser verificado usando-se L`Hospital para baixar o grau de b^n :

$$\lim_{b\to+\infty} [\frac{-b^n e^{-sb}}{s}] = \lim_{b\to+\infty} [\frac{-b^n}{se^{sb}}] = \lim_{b\to+\infty} [\frac{-nb^{n-1}}{s^2 e^{sb}}] = \lim_{b\to+\infty} [\frac{-n(n-1)b^{n-2}}{s^3 e^{sb}}] = ...$$

Assim, $L[t^n] = \frac{n}{s}L[t^{n-1}] = \frac{n(n-1)}{s^2}L[t^{n-2}] = \frac{n(n-1)(n-2)}{s^3}L[t^{n-3}] = ...=$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...2.1}{s^n}L[t^{n-n}] = \frac{n!}{s^n}L[1] = \frac{n!}{s^n}\frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Logo $\quad L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$; para $s > 0$

3.1) $L[t^2] = \frac{2!}{s^3}$; $\qquad$ 3.2) $L[t^5] = \frac{5!}{s^6}$

4. $f(t) = e^{at}$; $\quad t > 0$ e a constante

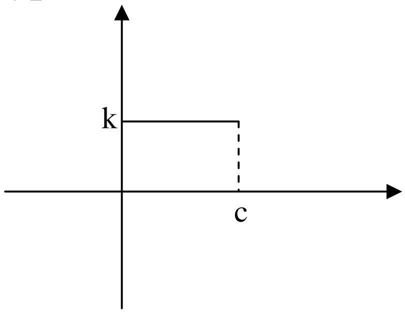
$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}dt = \lim_{b\to+\infty} [\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}]_0^b = \lim_{b\to+\infty} [\frac{e^{(a-s)b}}{a-s} - \frac{1}{a-s}] = -\frac{1}{a-s} \quad \text{se} \quad (a-s) < 0.$$

Logo, $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, se $s > a$.

4.1) $L[e^{t}] = \frac{1}{s-1}$;   4.2) $L[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$

5. $f(t) = \begin{cases} k; & \text{se } 0 < t < c \\ 0; & \text{se } t \geq c \end{cases}$



$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{c} ke^{-st} dt = [\frac{-ke^{-st}}{s}]_0^c = \frac{-ke^{-cs}+k}{s} = \frac{k(1-e^{-cs})}{s}$$

Algumas Considerações sobre a Existência das Transformadas

Como ilustramos nos exemplos acima, para um grande número de funções f(t), será possível calcular L[f] diretamente da definição. Precisamos, no entanto, estabelecer um conjunto de condições que garantam a existência da transformada de Laplace de uma função f(t). Para isso, vamos introduzir dois conceitos importantes: função **contínua por partes** e função de **ordem exponencial:**

Definição: Uma função f é dita **contínua por partes** num intervalo [a,b] se:

i) f é contínua em todos os pontos de [a,b], exceto num número finito

ii) os limites laterais existem nos pontos de descontinuidades

Exemplos:

1. A função $f(x) = \begin{cases} x; & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1-x; & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$ é contínua por partes em [0,2]

2. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ não é contínua por partes em nenhum intervalo contendo o zero.

Os seguintes resultados valem:

- Se f é contínua por partes em [a,b] então $\int_a^b f(x)dx$ existe e independe dos valores que f assume (se estiver definida) nos seus pontos de descontinuidades.
- Se f e g são contínuas por partes em [a,b], então f.g é contínua por partes em [a,b] e portanto $\int_a^b (fg)(x)dx$ existe
- Toda função contínua em [a,b] é contínua por partes

Examinando a definição da Transformada observamos que f(t) deve ser tal que $\int_0^b f(t)e^{-st}dt$ exista para todo b > 0. Isto pode ser obtido exigindo que f seja contínua por partes em todo intervalo da forma [0,b] (b > 0), uma vez que dessa forma o integrando será contínuo por partes e portanto a integral existirá. Mas esta condição não é suficiente pois queremos que a integral $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ seja convergente para algum valor de s. Isto pode ser garantido exigindo-se que e^{-st} f(t) se aproxime de zero quando t tende a infinito o que pode ser obtido se f(t) for "dominada" por uma exponencial. Este fato está expresso na seguinte definição:

Definição: Diz-se que uma função f é de **ordem exponencial** em [0, + ∞[se existem constantes M > 0 e α tais que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo t > t_o, para determinado t_o.

Exemplos:

1. f(t) = 1 é de ordem exponencial

Basta tomarmos $\alpha = 0$ e M = 1: $|f(t)| = |1| = 1.e^{0t}$

2. f(t) = t é de ordem exponencial

Basta mostrarmos que $\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{\alpha t}} = 0$ (para um $\alpha > 0$) pois a definição de limite nos garante que qualquer que seja M > 0, existe t_o tal que para t > t_o, $\frac{|t|}{e^{\alpha t}} < M$, logo $|t| \leq Me^{-\alpha t}$

O seguinte teorema nos garante a existência da Transformada de Laplace para funções contínuas por parte e de ordem exponencial:

Teorema: Se f é uma função contínua por partes e de ordem exponencial existe um número s_o tal que $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ converge para todos os valores de $s > s_o$

s_o é chamada de **abscissa de convergência**

Observação: A recíproca do Teorema não é verdadeira, isto é, uma função pode ter Transformada de Laplace sem ser de ordem exponencial. Um exemplo é $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Propriedades da Transformada de Laplace.

Teorema (Linearidade da Transformada de Laplace) :

A Transformada de Laplace é uma operação linear, isto é, para quaisquer funções f(t) e g(t) cujas transformadas de Laplace existam e quaisquer constantes a e b temos que $L[\ af(t) + bg(t)\ ] = aL[f(t)\ ] + bL[g(t)]$.

D] Usando a linearidade da integral e supondo que L[f] e L[g] existam temos que

$$L[af + bg] = \int_0^{+\infty} (af + bg)(t)e^{-st}dt = a\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt + b\int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt = aL[f] + bL[g]$$

Observações

- A transformada é um operador que aplica o conjunto das funções contínuas por partes e de ordem exponencial no conjunto das funções definidas em intervalos da forma $]s_o, +\infty[$
- $L[f + g] = L[f] + L[g]$ significa que a identidade ocorre para valores de s em que ambas as funções estão definidas

Com a propriedade da linearidade podemos ampliar a nossa lista de transformadas, como veremos nos exemplos seguintes:

Exemplo:

1) Usando a linearidade e os resultados já vistos, determine a Transformada de Laplace das seguintes funções

1.1) $f(t) = k$

$L[k] = L\,[k.1] = k\,L[1] = \frac{k}{s}$; $s > 0$

1.2) $f(t) = 2 - 3t + 2t^2$

$$L[f(t)] = L[2 - 3t + 2t^2] = L[2] - 3L[t] + 2L[t^2] = \frac{2}{s} - \frac{3}{s^2} + 2\frac{2!}{s^3}$$

1.3) $f(t) = e^{-t} + 2e^{2t} + 1$

$$L[f(t)] = L[e^{-t} + 2e^{2t} + 1] = L[e^{-t}] + 2L[e^{2t}] + L[1] = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s}$$

2. Usando a linearidade e a formula de Euler $e^{iwt} = \cos(wt) + i\,\mathrm{sen}(wt)$, deduza a transformada das funções: $f(t) = \cos wt$ e $f(t) = \mathrm{sen}(wt)$

Temos que $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$. Fazendo $a = iw$, $L[e^{iwt}] = \frac{1}{s - iw} = \frac{s + iw}{s^2 + w^2}$.

Por outro lado, pela fórmula de Euler, $e^{iwt} = \cos(wt) + i\,\mathrm{sen}(wt)$

Assim, $L[e^{iwt}] = L[\cos(wt) + i\,\mathrm{sen}(wt)] = L[\cos(wt)] + iL[\mathrm{sen}(wt)] = \frac{s}{s^2 + w^2} + i\frac{w}{s^2 + w^2}$

Logo, $L[\cos(wt)] = \frac{s}{s^2 + w^2}$ e $L[\mathrm{sen}(wt)] = \frac{w}{s^2 + w^2}$

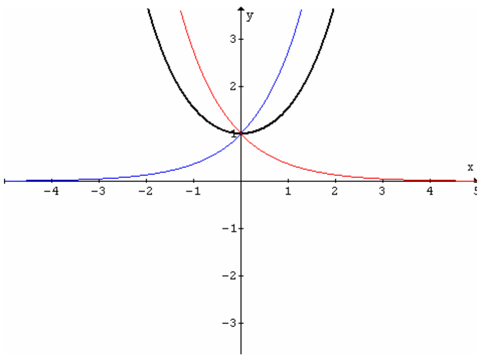
Usando a definição podemos mostrar que os resultados acima valem para $s > 0$.

2.1) $f(t) = 3\mathrm{sen}2t - \cos\sqrt{2}t \Rightarrow L[f(t)] = L[3\mathrm{sen}2t - \cos\sqrt{2}t] = 3L[\mathrm{sen}2t] - L[\cos\sqrt{2}t]$

$$= 3\frac{2}{s^2 + 4} - \frac{s}{s^2 + 2}$$

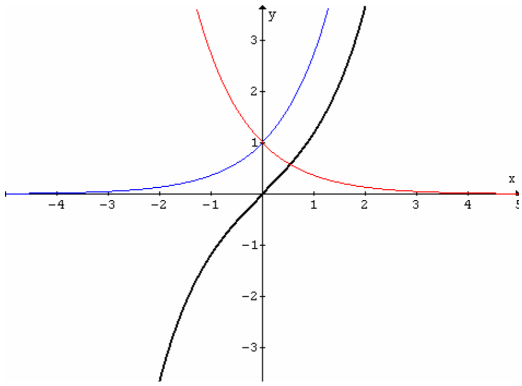
3. Usando a linearidade deduza a transformada

3.1. $f(t) = \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$ (cosseno hiperbólico)



$$L[\cosh at] = L[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}] = \frac{1}{2}(L[e^{at}] + L[e^{-at}]) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2}\ ; \ \ s > a$$



3.2) $f(t) = \text{senh}\, at = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ (seno hiperbólico)

$$L[\text{senhat}] = L\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}(L[e^{at}] - L[e^{-at}]) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}\ ; \ \ s > a$$

Referências Bibliográficas: 1. Kreyszig, Erwin – Matemática Superior - vol 1

2. Zill/Cullen – Equações Diferenciais - vol 1

3. Kreider/Kuller/Ostberg – Equações Diferenciais