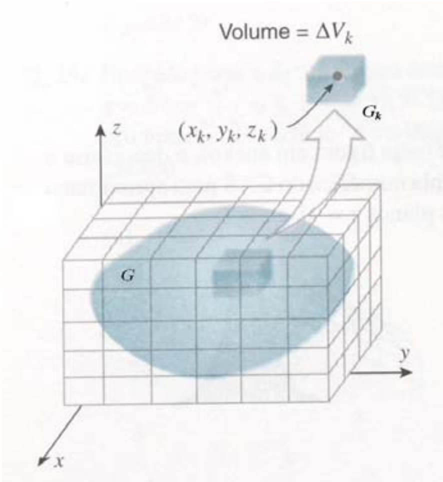
Álvaro Fernandes

Integrais triplas

Seja $w = f(x, y, z)$ uma função contínua definida numa região fechada e limitada G do espaço. Podemos associar a G um sólido no espaço. Subdividimos G em pequenos paralelepípedos traçando-se planos paralelos aos planos coordenados. Considere apenas os paralelepípedos no interior de *G*, como mostra afigura abaixo.



Numeramos os paralelepípedos de *1* até *n*. Em cada um dos pequenos paralelepípedos G_k, $k = 1,2,...,n$, escolhemos um ponto interno (x_k, y_k, z_k).

Formamos a soma de *Riemman* $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$, onde $\Delta V_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k \cdot \Delta z_k$ é o volume do paralelepípedo G_k. Isto é feito de maneira arbitrária, mas de tal modo que a maior aresta dos paralelepípedos G_k tenda a zero quando $n \to \infty$.

Se existir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k \ ,$$

ele é chamado de ***integral tripla*** da função $f(x, y, z)$ sobre o sólido *G* e representamos por

$$\iiint_G f(x, y, z)\ dV \quad \text{ou} \quad \iiint_G f(x, y, z)\ dxdydz .$$

Então $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \iiint_G f(x, y, z)\ dxdydz$.

Obs.: dV pode assumir qualquer uma das seis formas abaixo

$dxdydz,\ dxdzdy,\ dydxdz,\ dydzdx,\ dzdxdy,\ dzdydx$.

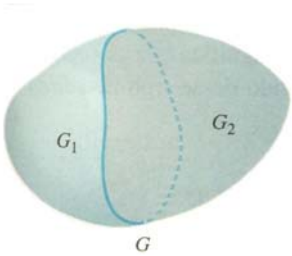
Propriedades da integral tripla

As integrais triplas satisfazem as seguintes propriedades:

a) $\iiint_G \ k \cdot f(x,y,z) \ dV = k \cdot \iiint_G \ f(x,y,z) \ dV$, sendo k uma constante real.

b) $\iiint_G \ f(x,y,z) \pm g(x,y,z) \ dV = \iiint_G \ f(x,y,z) \ dV \ \pm \iiint_G \ g(x,y,z) \ dV$.

c) $\iiint_G \ f(x,y,z) \ dV = \iiint_{G_1} \ f(x,y,z) \ dV \ + \iiint_{G2} \ f(x,y,z) \ dV$, onde $G = G_1 \cup G_2$ como mostra a figura abaixo.

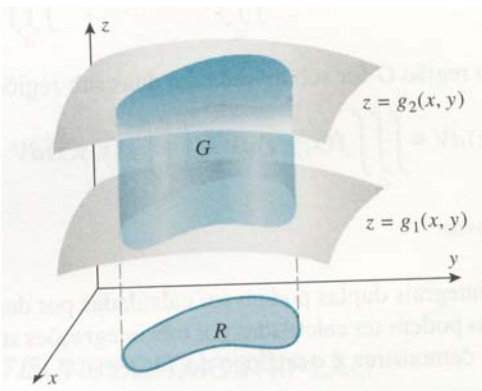


Cálculo da integral tripla

As integrais triplas podem ser calculadas de forma análoga ás integrais duplas, através de integrações sucessivas.

Teorema: Seja $w = f(x,y,z)$ uma função contínua definida sobre um sólido G do espaço limitado *inferiormente* pela superfície $z = g_1(x,y)$ e *superiormente* pela superfície $z = g_2(x,y)$. Seja R a projeção de G no plano xy. Então:

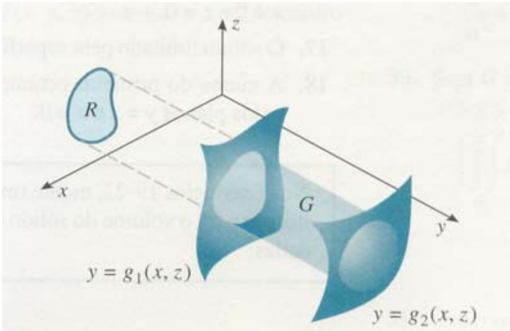
$$\iiint_G \ f(x,y,z) \ dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \ f(x,y,z) \ dz \right] dA \ .$$



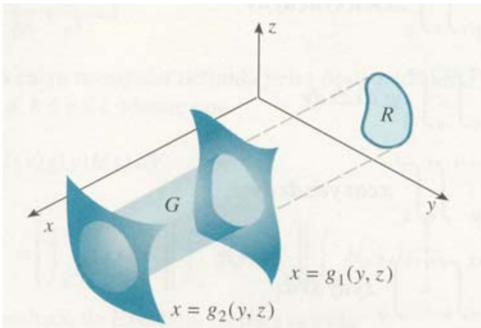
Observe que a primeira integração é feita em relação a variável z. Desta forma, resta uma função nas variáveis x e y que é então integrada na região R do plano xy.

O sólido G pode ser também projetado nos planos xz e yz. Nestes casos, as superfícies que limitam G inferiormente e superiormente são funções da forma $y = g(x,z)$ e $x = g(y,z)$, respectivamente. O cálculo da integral tripla é então feito de forma análoga.

Projeção de G no plano xz: $\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\ dy \right] dA$.

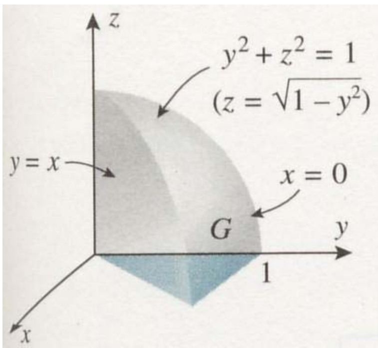


Projeção de G no plano yz: $\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \iint_R \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\ dx \right] dA$.



Exemplo: Calcule $\iiint_G f(x,y,z)\ dV$, sendo $f(x,y,z) = z$ e G é o sólido no *primeiro octante* limitado pelo cilindro $z^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = x$ e $x = 0$.

Esboço do sólido G:



A projeção do sólido G no plano xy é a região triangular descrita por

$R_1 = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ 0 \le y \le 1 \text{ e } 0 \le x \le y\}$ ou

$R_2 = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ 0 \le x \le 1 \text{ e } x \le y \le 1\}$.

O sólido G é limitado *inferiormente* pela superfície $z = 0$ e *superiormente* por $z = \sqrt{1 - y^2}$.

Usando a região triangular descrita por R_1 , temos:

$$\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \iint_{R_1} \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (z)\ dz \right] dA = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (z)\, dzdxdy = \ldots = 1/8\ .$$

Usando a região triangular descrita por R_2 , temos:

$$\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \iint_{R_2} \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (z)\ dz \right] dA = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (z)\, dzdydx = \ldots = 1/8\ .$$

****

Se a projeção de G fosse no plano *yz*, obteríamos as seguintes formas:

$R_3 = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \ \ / \ \ 0 \le y \le 1 \ \text{ e } \ 0 \le z \le \sqrt{1-y^2} \right\}$ ou

$R_4 = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \ \ / \ \ 0 \le z \le 1 \ \text{ e } \ 0 \le y \le \sqrt{1-z^2} \right\}$.

Neste caso, o sólido G é limitado *inferiormente* pela superfície $x = 0$ e *superiormente* por $x = y$.

Usando a região triangular descrita por R_3 , temos:

$$\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \iint_{R_3} \left[\int_0^{y} (z)\ dx \right] dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{y} (z)\, dxdzdy = \ldots = 1/8\ .$$

Usando a região triangular descrita por R_4 , temos:

$$\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \iint_{R_4} \left[\int_0^{y} (z)\ dx \right] dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{y} (z)\, dxdydz = \ldots = 1/8\ .$$

****

Se a projeção de G fosse no plano *xz*, obteríamos as seguintes formas:

$R_5 = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \ \ / \ \ 0 \le x \le 1 \ \text{ e } \ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2} \right\}$ ou

$R_6 = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \ \ / \ \ 0 \le z \le 1 \ \text{ e } \ 0 \le x \le \sqrt{1-z^2} \right\}$.

Neste caso, G é limitado *inferiormente* pela superfície $y = x$ e *superiormente* por $y = \sqrt{1 - z^2}$.

Usando a região triangular descrita por R_5 , temos:

$$\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \iint_{R_5}\left[\int_x^{\sqrt{1-z^2}} (z)\ dy\right] dA = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_x^{\sqrt{1-z^2}} (z)\, dydzdx = \ldots = 1/8\,.$$

Usando a região triangular descrita por R_6 , temos:

$$\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \iint_{R_6}\left[\int_x^{\sqrt{1-z^2}} (z)\ dy\right] dA = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\int_x^{\sqrt{1-z^2}} (z)\, dydxdz = \ldots = 1/8\,.$$

Como você pode notar, podemos calcular uma integral tripla de seis formas possíveis. A escolha da projeção do sólido G deve ser feita de forma que as integrais sejam as mais simples de serem resolvidas, minimizando assim os cálculos.

Calculando volumes com integrais triplas

Se fizermos $f(x,y,z)=1$, então

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k = \iiint_G dV\,.$$

Poderemos calcular o volume de um sólido G como

$$\boxed{\text{Vol}\,(G) = \iiint_G dV}$$

Exercícios:

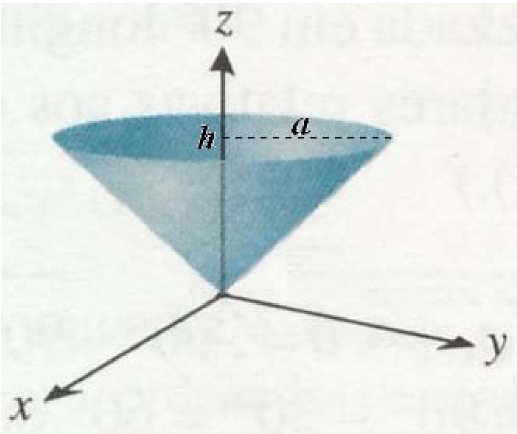
1. Usando integral tripla, mostre que o volume de um cilindro circular reto de raio de base a e altura h é dado por $V = \pi a^2 h$.

2. Usando integral tripla, mostre que o volume de uma esfera de raio a é dado por $V = 4\pi a^3/3$.

3. Usando integral tripla, mostre que o volume de um cone circular reto de raio de base a e altura h é dado por $V = \pi a^2 h/3$. Veja a equação e o gráfico do cone abaixo.

Equação do cone:

$$z = \frac{h}{a}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$



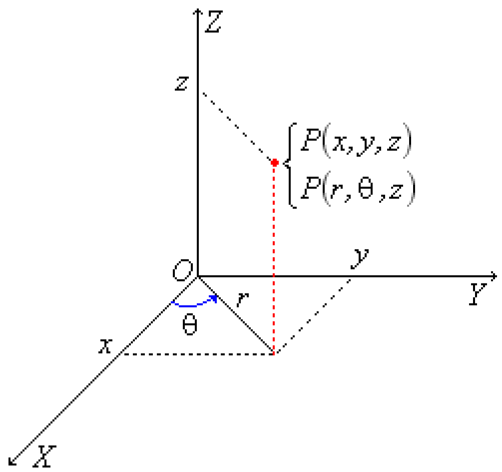
4. Calcule o volume da região do espaço interna ao cilindro $x^2+y^2=9$, acima do plano xy e abaixo do hemisfério $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$. Esboce o sólido. R. 122π/3

Mudança de variáveis nas integrais triplas

Vimos que algumas integrais duplas são mais fáceis de calcular em coordenadas polares do que em coordenadas retangulares. De maneira semelhante, algumas integrais triplas são mais fáceis de calcular em *coordenadas cilíndricas* ou *coordenadas esféricas* do que em coordenadas retangulares. Vamos estudar então as integrais triplas nesses sistemas de coordenadas.

- **Sistema de coordenadas cilíndricas**

Um ponto no sistema retangular $P(x, y, z)$ é representado em coordenadas cilíndricas por $P(r, \theta, z)$, onde r $(r \geq 0)$ e θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ são as mesmas variáveis das coordenadas polares.

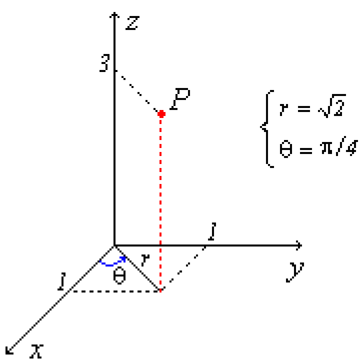


Observe que a coordenada z é comum aos dois sistemas.

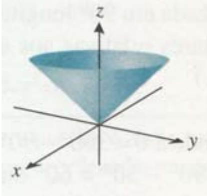
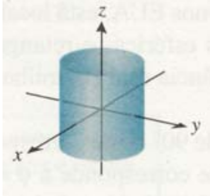
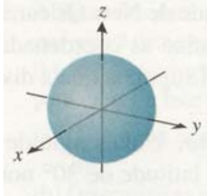
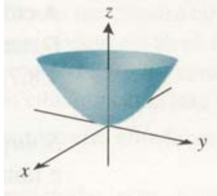
As equações que relacionam os dois sistemas são:

Sistema cilíndrico para retangular	Sistema retangular para cilíndrico
$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,sen(\theta) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg(y/x) \\ z = z \end{cases}$

Exemplo: O ponto no sistema retangular $P(1,1,3)$ tem representação $P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 3\right)$ em coordenadas cilíndricas.



Equações de algumas superfícies em coordenadas cilíndricas

	Cone	Cilindro	Esfera	Parabolóide
				
Coordenadas retangulares	$z = k\sqrt{x^2 + y^2}, k > 0$	$x^2 + y^2 = a^2$	$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	$z = k\left(x^2 + y^2\right), k > 0$
Coordenadas cilíndricas	$z = kr, k > 0$	$r = a$	$z^2 = a^2 - r^2$	$z = kr^2, k > 0$

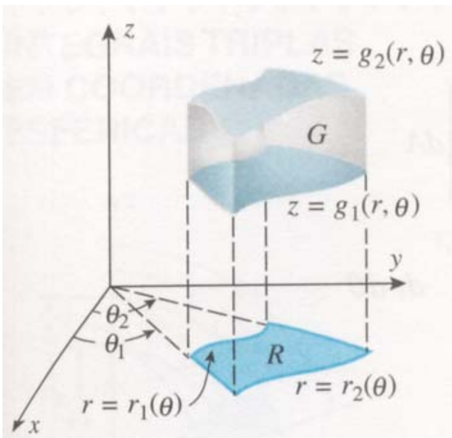
Cálculo de uma integral tripla em coordenadas cilíndricas

Seja G um sólido cuja superfície superior tem equação $z = g_2(r,\theta)$ e cuja superfície inferior tem equação $z = g_1(r,\theta)$ em coordenadas cilíndricas. Se R for a projeção do sólido G no plano xy e se $w = f(x,y,z)$ for contínua em G, então

$$\boxed{\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \iint_R \left[\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r\cos(\theta), r\,sen(\theta), z)\ dz \right] dA,}$$

na qual a integral dupla é calculada em coordenadas polares. Em particular, se a projeção R for como mostrado na figura abaixo, então a integral tripla pode ser calculada como

$$\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r\cos(\theta), r\,sen(\theta), z)\ dz\, r dr d\theta.$$



Exercícios:

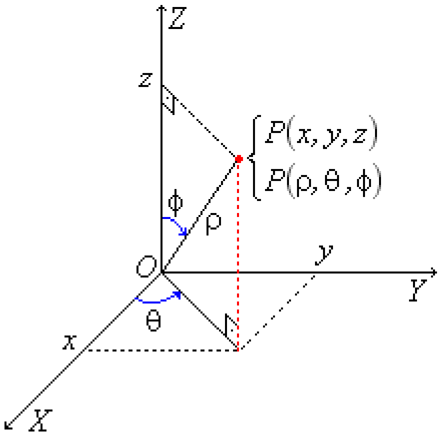
1. Calcule $\iiint_G z\ \ dV$, onde G é o sólido acima do plano xy e interior simultaneamente ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Esboce o sólido. Resp: $7\pi/4$.

2. Calcule o volume do sólido acima do plano xy, exterior ao parabolóide $z = x^2 + y^2$ e interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 16$. Esboce o sólido. Resp: 128π u.v.

- **Sistema de coordenadas esféricas**

Um ponto no sistema retangular $P(x, y, z)$ é representado em coordenadas esféricas por $P(\rho, \theta, \phi)$, onde:

$$\begin{cases} \rho \ (\rho \geq 0) \text{ é a distância de } P \text{ até a origem;} \\ \theta \ (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ é o mesmo ângulo de } \textit{coordenadas cilíndricas}; \\ \phi \ (0 \leq \phi \leq \pi) \text{ é o ângulo } z\hat{O}P. \end{cases}$$

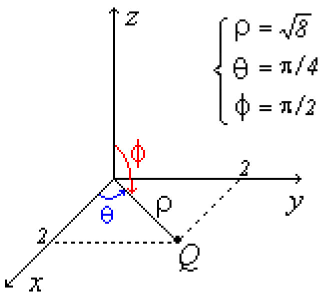


Observe que o ângulo ϕ é medido a partir do eixo *OZ*.

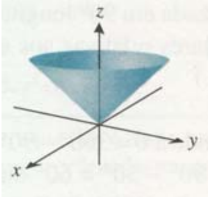
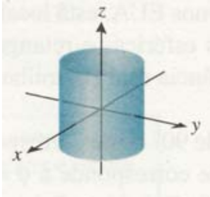
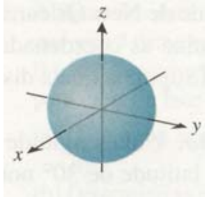
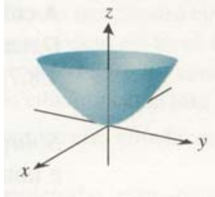
As equações que relacionam os dois sistemas são:

Sistema esférico para retangular	Sistema retangular para esférico
$\begin{cases} x = \rho sen(\phi) cos(\theta) \\ y = \rho sen(\phi) sen(\theta) \\ z = \rho cos(\phi) \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \text{arctg}(y/x) \\ \phi = \text{arccos}\left(z \Big/ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \end{cases}$

Exemplo: O ponto no sistema retangular $Q(2,2,0)$ tem representação $Q\left(\sqrt{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ em coordenadas esféricas.



Equações de algumas superfícies em coordenadas esféricas

	Cone	Cilindro	Esfera	Parabolóide
				
Coordenadas retangulares	$z = k\sqrt{x^2+y^2}, k>0$	$x^2+y^2=a^2$	$x^2+y^2+z^2=a^2$	$z = k(x^2+y^2), k>0$
Coordenadas esféricas	$\phi = \text{arctg}(1/k)$	$\rho = a\,\text{cossec}(\phi)$	$\rho = a$	$\rho = k^{-1}\text{cotg}(\phi)\text{cossec}(\phi)$

Cálculo de uma integral tripla em coordenadas esféricas

Se G é um sólido no espaço tridimensional, então a integral tripla em G de uma função contínua $w = f(x,y,z)$ é calculada similarmente à integral tripla em coordenadas cilíndricas. Obtendo os limites de integração apropriados na descrição de G em coordenadas esféricas, pode-se mostrar que

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iiint_G f(\rho sen(\phi)cos(\theta),\ \rho sen(\phi)sen(\theta),\ \rho cos(\phi))\,\rho^2 sen(\varphi)\,d\rho d\theta d\phi.$$

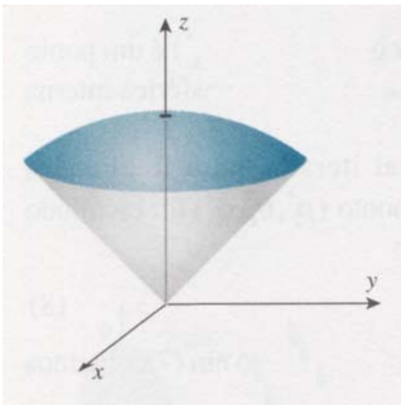
Obs.: No processo de partição do sólido G em coordenadas esféricas o fator extra $\rho^2 sen(\phi)$ no integrando aparece de forma semelhante ao fator r em coordenadas cilíndricas.

Exercícios:

1. Use coordenadas esféricas para calcular $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\left(z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dzdydx$.

Obs.: Esboce o sólido para retirar de forma apropriada os limites de integração em coordenadas esféricas. Resp.: $64\pi/9$.

2. Use coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido limitado superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=16$ e inferiormente pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, como mostra a figura abaixo.



Resp.: $\frac{64\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Bibliografia utilizada: Cálculo B, Diva Flemming, e Cálculo Vol. 2, Howard Anton.