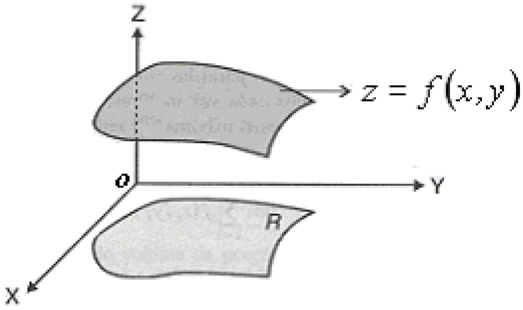
Álvaro Fernandes

Integral dupla

Considere uma superfície $z = f(x, y)$ definida numa região fechada e limitada *R* do plano *xy*.

R é a projeção da superfície sobre o plano *xy*.



Traçando-se retas paralelas aos eixos *ox* e *oy*, respectivamente, recobrimos a região *R* por pequenos retângulos. Considere somente os retângulos R_k que estão totalmente contidos em *R*, numerando-os de *1* até *n* (figura 1).

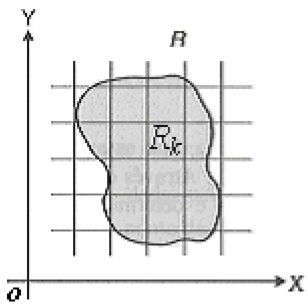


Figura 1

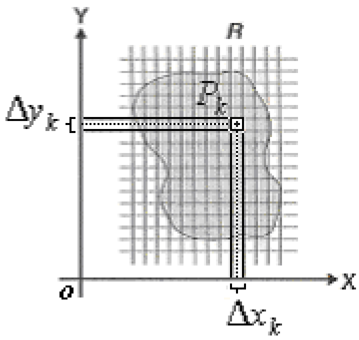


Figura 2

Em cada retângulo R_k, escolha um ponto interno $P_k(x_k, y_k)$ e forme a soma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$, onde $\Delta A_k = \Delta x_k . \Delta y_k$ é a área do retângulo R_k.

Suponha que mais retas paralelas aos eixos coordenados são traçadas, tornando as dimensões dos retângulos cada vez menores (figura 2). Isso é feito de tal maneira que a diagonal máxima dos retângulos R_k tende a zero quando *n* tende ao infinito.

Nessa situação, se $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$ existe, ele é chamado de integral dupla da função $f(x, y)$ sobre a região *R*.

Denotamos este limite como $\iint_R f(x, y)\, dA$ ou $\iint_R f(x, y)\, dxdy$ ou $\iint_R f(x, y)\, dydx$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \iint_R f(x,y)\,dA$$

Observações:

1. A região R é denominada *região de integração.*
2. A soma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$ é chamada de soma de *Riemann* de $z = f(x,y)$ sobre R.

Veremos que se $z = f(x,y) \geq 0$, a integral dupla pode ser interpretada como um **volume**.

Interpretação geométrica da integral dupla

Suponha $z = f(x,y) \geq 0$ sobre R. Observe que $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ representa o volume de um prisma reto, cuja base é o retângulo R_k e cuja altura é $z_k = f(x_k, y_k)$ (figura 3).

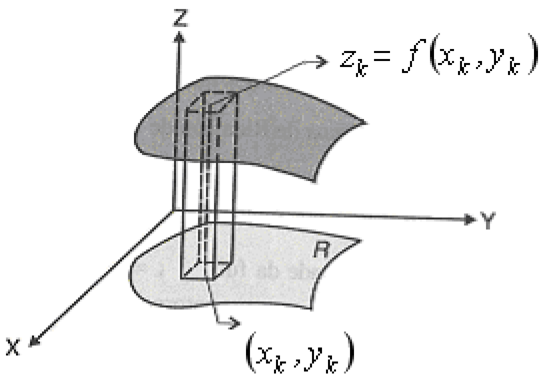


Figura 3

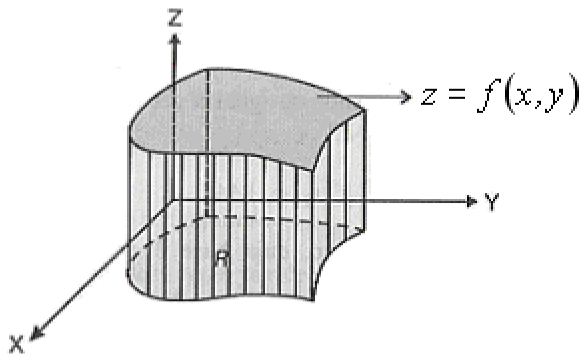


Figura 4

A soma de *Riemann* $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$ representa uma aproximação do volume da porção do espaço compreendida abaixo do gráfico da superfície $z = f(x,y)$ e acima da região R do plano xy.

Assim, quando $f(x,y) \geq 0$, a $\iint_R f(x,y)\,dA$ nos dá o **volume** do sólido delimitado superiormente pela superfície $z = f(x,y)$, inferiormente pela região R e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de R (figura 4).

Obs.: Se $f(x,y) \leq 0$, a $\iint_R f(x,y)\,dA$ nos dá o volume do sólido, porém com o sinal ***negativo***.

Álvaro Fernandes

Propriedades da integral dupla.

Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ funções contínuas sobre a região *R*, então:

a) $\iint_R k.f(x,y)\,dA = k.\iint_R f(x,y)\,dA$, para todo *k* real.

b) $\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \pm \iint_R g(x,y)\,dA$.

c) Se a região *R* é composta de duas subregiões R_1 e R_2 que não tem pontos em comum (figura 5), exceto os pontos de fronteira, então:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA.$$

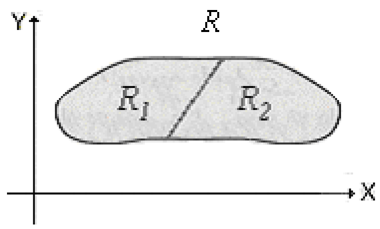
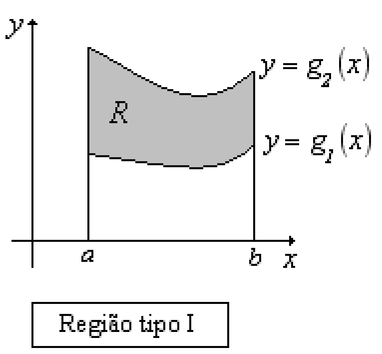


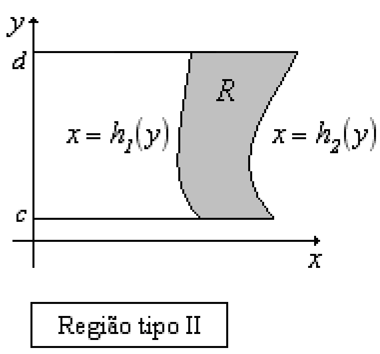
Figura 5

Cálculo das integrais duplas

De acordo com o tipo de região de integração *R*, podemos calcular a integral dupla de duas formas:

- Se *R* é uma região do tipo I, então $\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\;dydx$.
- Se *R* é uma região do tipo II, então $\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\;dxdy$.





Região tipo I: $\left\{(x,y) \in \Re^2 \;\;/\;\; a \le x \le b \;\;\; e \;\;\; g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}$.

Região tipo II: $\left\{(x,y) \in \Re^2 \;\;/\;\; c \le y \le d \;\;\; e \;\;\; h_1(y) \le x \le h_2(y)\right\}$.

Exercícios:

1. Calcule $\iint_R (1+8xy)\,dA$, onde R é a região retangular $\{(x,y)\in\Re^2 \;/\; 1\le y\le 2,\; 0\le x\le 3\}$.

Proposição: Se R é a região retangular $\{(x,y)\in\Re^2 \;/\; a\le x\le b,\; c\le y\le d\}$, então $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\; dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\; dxdy$.

2. Calcule $\iint_R (4-x-y)\,dA$. A região R está representada na figura 6.

3. Calcule $\iint_R y\,dA$. A região R está representada na figura 7.

4.Calcule $\iint_R ysen(xy)\,dA$, onde R é a região retangular de vértices

$A(0,\ \pi/2), B(1,\ \pi/2), C(1,\pi)$ e $D(0,\pi)$.

5. Calcule $\iint_R e^{-x^2}\; dxdy$, sendo R a região delimitada por $x=4y,\; y=0$ e $x=4$.

6. Calcule $\iint_R xy\,dA$. A região R está representada na figura 8.

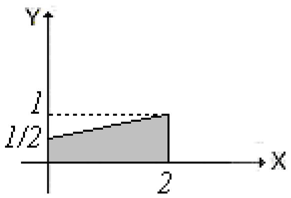


figura 6

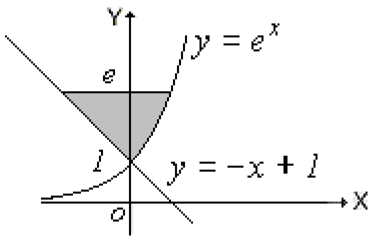


figura 7

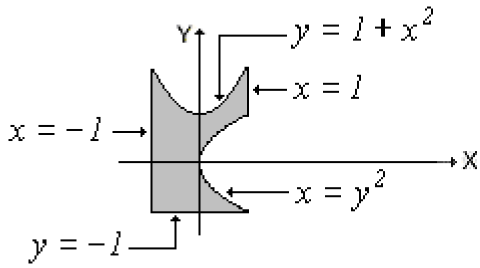


figura 8

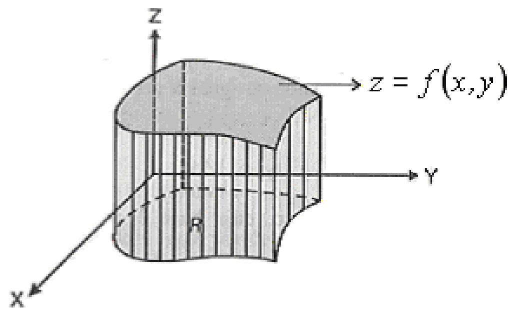
Respostas:

1) 57.
2) 15/4.
3) $(e^3/3)-(e^2/4)+(5/12)$.
4) $1+(\pi/2)$.
5) $(1-e^{-16})/8$.
6) 0.

Aplicações da integral dupla

Volumes de sólidos

Se $f(x,y) \geq 0$ a integral dupla $\iint_R f(x,y)\,dA$ nos dá o volume do sólido delimitado superiormente pela superfície $z = f(x,y)$, inferiormente pela região *R* e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de *R*.



Exercícios:

7. Calcule o volume do sólido delimitado superiormente pelo plano $z = 4 - x - y$, inferiormente pela região *R* delimitada por $x = 0,\ x = 2,\ y = 0$ e $y = (x/4) + (1/2)$ e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de *R*. Esboce o sólido.

8. Calcule o volume do sólido no **primeiro octante**, delimitado pelo plano $z + y = 2$ e pelo cilindro vertical que contorna a região plana delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x$. **Esboce o sólido**.

9. Calcule o volume do sólido no **primeiro octante**, delimitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 16$ e $x^2 + z^2 = 16$. **Esboce o sólido**.

10. Calcule o volume do sólido delimitado pelas superfícies abaixo. **Esboce o sólido**.

$z = 1 - x^2$ (cilindro parabólico) e pelos planos $z = 0,\ y = 0$ e $x + y = 4$.

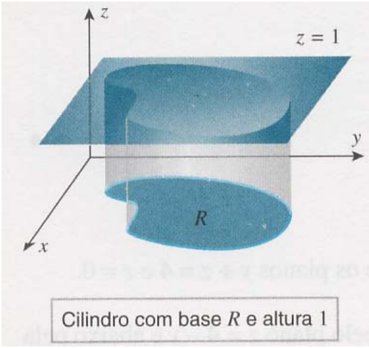
Respostas:

7) 15/4.
8) 4/15.
9) 128/3.
10) 16/3.

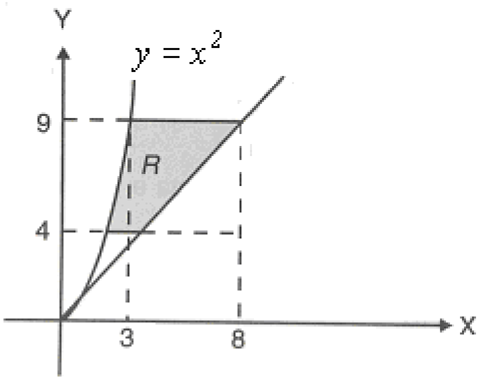
Áreas de regiões planas

Se na expressão $\iint_R f(x,y)\,dA$ fazemos $f(x,y)=1$, obtemos $\iint_R dA$ que nos dá a ***área*** da região de integração *R*.

$$\boxed{\text{Área }(R) = \iint_R (1)\,dA}$$



11. Calcule a área da região *R* mostrada na figura abaixo:



12. Calcule a área da região plana limitada pelas curvas abaixo. Esboce os gráficos e identifique a região.

$$\begin{cases} y = ln(x), 1 \le x \le e \\ y = 1 - x, 0 \le x \le 1 \\ y = e^x, 0 \le x \le e \\ x = e, 1 \le y \le e^e \end{cases}$$

Respostas:

11) 146/9.
12) $e^e - (5/2) \cong 12{,}65$.

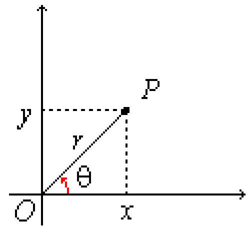
Álvaro Fernandes

Integral dupla em coordenadas polares

- **Descrição de regiões planas em coordenadas polares (revisão).**
- **Integral dupla em coordenadas polares.**

Descrição de regiões planas em coordenadas polares (revisão)

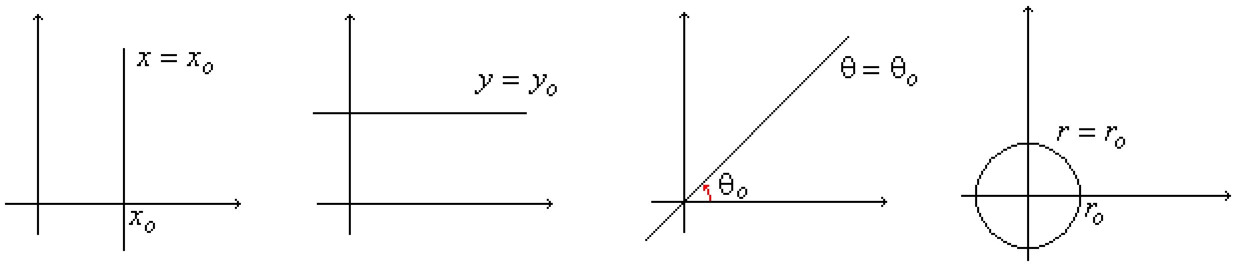
As equações $x = r\cos(\theta)$ e $y = r sen(\theta)$ definem as relações de coordenadas do sistema *polar* para o sistema *cartesiano*. Para o estudo das integrais duplas em coordenadas polares, basta considerarmos $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.



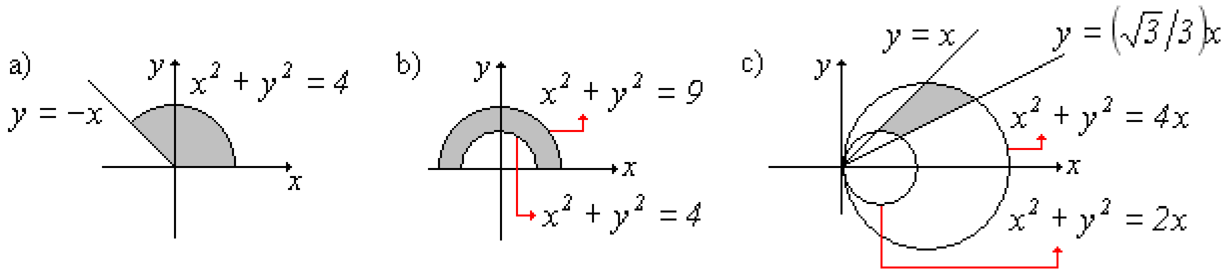
De $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r sen(\theta) \end{cases}$, obtemos as relações $x^2 + y^2 = r^2$ (ou $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) e $\theta = arctg(y/x)$.

A descrição de um ponto $P(x, y)$ no sistema polar é $P(r, \theta)$, sendo r a distância de P ao centro e θ o ângulo que o segmento $\overline{PO}$ forma com o eixo x positivo. Por exemplo, o ponto $P(1,1)$ em coordenadas cartesianas é representado por $P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ no sistema polar. Verifique!

No sistema cartesiano as retas verticais e horizontais têm equações da forma $x = x_o$ (x_o constante) e $y = y_o$ (y_o constante), respectivamente. Já no sistema polar, $\theta = \theta_o$ (θ_o constante) representa uma reta que passa pela origem e $r = r_o$ (r_o constante) representa uma circunferência de centro na origem e raio r_o. Prove estes resultados.



Exercício: Descreva as regiões circulares abaixo em coordenadas polares.



Integral dupla em coordenadas polares

Algumas integrais são mais fáceis de serem calculadas se a região R de integração for expressa em coordenadas polares. Por exemplo, o setor circular da figura 1 tem descrição mais simples em coordenadas polares do que em coordenadas cartesianas.

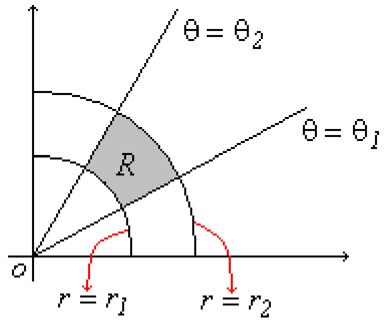
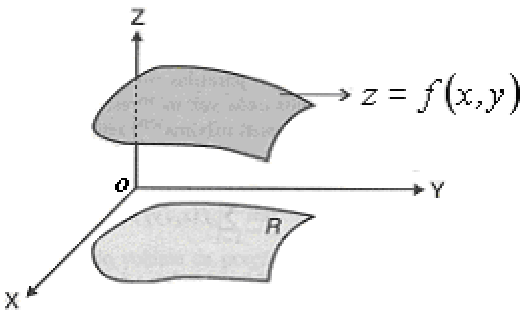


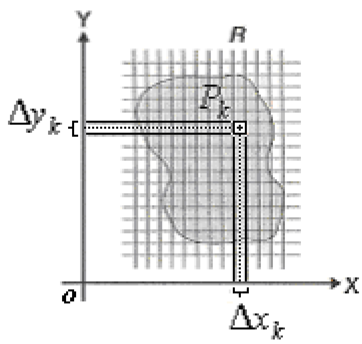
Figura 1

Esta região é descrita em coordenadas polares como $R = \{(r,\theta) \in \Re^2 \ / \ r_1 \le r \le r_2 \ \text{ e } \ \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$.

Chamamos este tipo de região de *retângulo polar*. A descrição dos retângulos polares em coordenadas cartesianas não é tão simples como a descrita acima. Além disso, as integrais duplas cujos integrandos envolvem $x^2 + y^2$ também tendem a ser mais fáceis de serem calculadas em coordenadas polares, pois esta soma é igual a r^2, quando aplicadas as fórmulas de conversão $x = r\cos(\theta)$ e $y = r sen(\theta)$.

Considere $z = f(x,y)$ uma superfície definida numa região R fechada e limitada do plano *xy*.





Sabemos que $\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$, onde $\Delta A_k = \Delta x_k . \Delta y_k$ representa a área do k-ézimo retângulo obtido na partição da região R em coordenadas cartesianas e (x_k, y_k) é um ponto interno deste retângulo. Este limite expressa a soma de *Riemman* que define a integral dupla da função f sobre a região *R*. Vamos calcular esta soma num sistema de coordenadas polares. Para isso, dividiremos a região R em pequenos retângulos polares (ver figura 2).

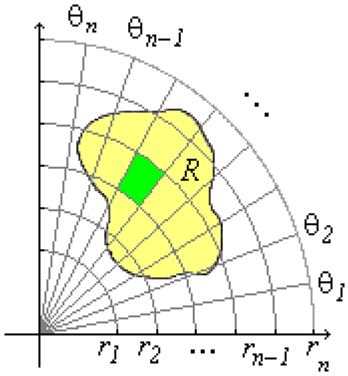


Figura 2

Considere apenas os retângulos polares internos a região R. Vamos destacar o pequeno retângulo polar da figura 2 e calcular a sua área.

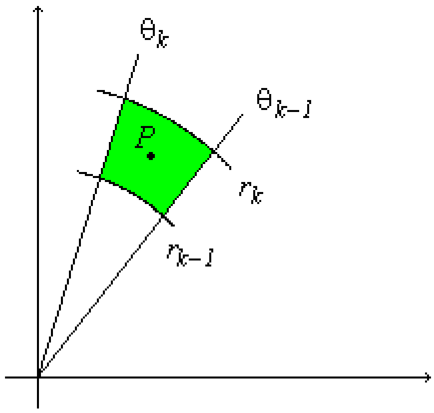


Figura 3

Seja $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ e $\Delta r_k = r_k - r_{k-1}$.

Vamos escolher o ponto arbitrário $P\left(r_k^*,\ \theta_k^*\right)$ como sendo o "centro" deste k-ézimo retângulo polar. Então:

$$r_k^* = \frac{r_{k-1} + r_k}{2} \qquad \text{e} \qquad \theta_k^* = \frac{\theta_{k-1} + \theta_k}{2}.$$

Considerando ΔA_k a área desse retângulo polar como a diferença de áreas entre dois setores circulares, obtemos:

$$\Delta A_k = \frac{\Delta\theta_k \cdot (r_k)^2}{2} - \frac{\Delta\theta_k \cdot (r_{k-1})^2}{2} = \frac{\Delta\theta_k \left[(r_k)^2 - (r_{k-1})^2\right]}{2} = \frac{\Delta\theta_k (r_k + r_{k-1})(r_k - r_{k-1})}{2} =$$

$$= \frac{(r_k + r_{k-1})}{2} \cdot (r_k - r_{k-1}) \cdot \Delta\theta_k = r_k^* \cdot \Delta r_k \cdot \Delta\theta_k. \qquad \text{Assim, } \boxed{\Delta A_k = r_k^* \cdot \Delta r_k \cdot \Delta\theta_k}.$$

Desta forma, o limite da soma de *Riemman* que define a integral dupla no sistema polar é

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(r_k^* \cos\left(\theta_k^*\right),\ r_k^* sen\left(\theta_k^*\right)\right)\cdot r_k^* \cdot \Delta r_k \cdot \Delta\theta_k .$$

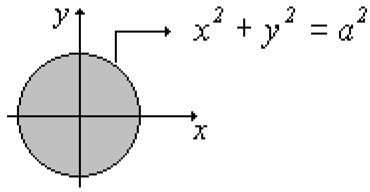
Esta soma sugere então que $\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_R f(r\cos(\theta),\ r sen(\theta))\, r\, dr\, d\theta$.

Conclusão:

Para calcularmos uma integral dupla no sistema de coordenadas polares devemos descrever a região R em coordenadas polares, aplicar as fórmulas de conversão $x = r\cos(\theta)$ e $y = r sen(\theta)$ na equação da superfície $z = f(x, y)$ e lembrar que $dxdy = rdrd\theta$, isto é:

$$\iint_R f(x,y)\, dxdy = \iint_R f(r\cos(\theta),\ r sen(\theta))\, r\, dr\, d\theta .$$

Exemplo: Mostre que a área de uma circunferência de raio a é πa^2 usando integral dupla em coordenadas cartesianas e polares.



❖ Usando integral dupla em coordenadas cartesianas:

$R = \left\{(x, y) / -a \le x \le a,\ -\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\right\}$ é a descrição da região em coordenadas cartesianas.

Área = $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (1)\, dydx = \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - x^2}\ dx = * = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \pi a^2$.

* Calcule esta integral usando a substituição trigonométrica $x = a sen(t),\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

❖ Usando integral dupla em coordenadas polares:

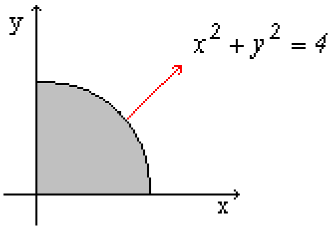
$R = \{(r, \theta) / 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ é a descrição da região em coordenadas polares.

Área = $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{a} (1)\ r\, drd\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{0}^{a} d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{a^2}{2}\, d\theta = \pi a^2$.

Realmente as coordenadas polares simplificaram bastante este cálculo!!!

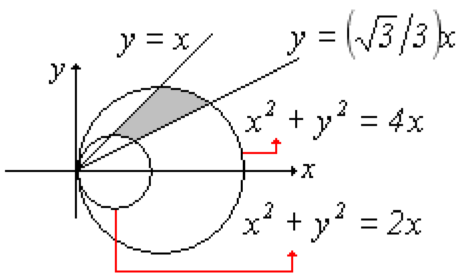
Exercícios:

13. Calcule $\iint_R sen\left(x^2+y^2\right)dxdy$, onde R é a região da figura abaixo.



14. Calcule $\iint_R 2e^{\left(x^2+y^2\right)}dxdy$, onde R é a região do plano xy delimitada por $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

15. Calcule $\iint_R dxdy$, onde R é a região sombreada da figura abaixo.



16. Calcule $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} \left(x^2+y^2\right) dxdy$. Esboce a região de integração.

Use, se necessário, as integrais $\begin{cases} \int sen^4(u)\,du = -\frac{1}{4}sen^3(u)cos(u) - \frac{3}{8}cos(u)sen(u) + \frac{3}{8}u + C \\ \\ \int cos^4(u)\,du = \frac{1}{4}cos^3(u)sen(u) + \frac{3}{8}cos(u)sen(u) + \frac{3}{8}u + C \end{cases}$.

17. Calcule o volume do sólido delimitado pelas superfícies abaixo. Esboce as superfícies.

a) $\begin{cases} x^2+y^2=1\ (cilindro) \\ z=0\ (plano) \\ z=x^2+y^2\ (parabolóide) \end{cases}$.

b) $\begin{cases} z=9-x^2-y^2\ (parabolóide) \\ z=x^2+y^2\ (parabolóide) \end{cases}$.

Resp: 13) $\frac{\pi(1-cos(4))}{4}$. 14) $2\pi\left(e^4-e\right)$. 15) $\frac{\pi+6-3\sqrt{3}}{4}$. 16) 12π. 17.a) $\frac{\pi}{2}u.v.$ 17.b) $\frac{81\pi}{4}u.v.$

Bibliografia utilizada: Cálculo B, Diva Flemming e Cálculo Vol. 2, James Stewart.