

3ª Lista de Exercícios: Tópicos de Cálculo Vetorial 2009.2

1. Esboçar o gráfico das curvas representadas pelas seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{a}(t) = (4-t)\vec{i} + (2t)\vec{j}$, $t \in [0,2]$.

d) $\vec{d}(t) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + t\vec{k}$, $t \in \mathfrak{R}$.

b) $\vec{b}(t) = 2\text{sen}(t)\vec{i} + 4\vec{j} + 3\cos(t)\vec{k}$, $t \in [0,2\pi]$.

e) $\vec{e}(t) = 2t\vec{i} + 2\vec{j} + 4t^2\vec{k}$, $t \in \mathfrak{R}$

c) $\vec{c}(t) = \vec{i} + t\vec{j} + (1-t^2)\vec{k}$, $t \in \mathfrak{R}$.

2. Seja $\vec{f}(t) = \vec{a}t + \vec{b}t^2$ e $\vec{g}(t) = t\vec{i} + \text{sen}t\vec{j} + \cos t\vec{k}$, com $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

Calcule: a) $\vec{f}(t) + \vec{g}(t)$. b) $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$.

3. Uma partícula se desloca no espaço. Em cada instante t ($t > 2$) o seu vetor posição é dado por

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t-2}\vec{j} + \vec{k}.$$

a) Esboce a trajetória da partícula e determine a posição da partícula nos instantes $t = 3$;

b) Quando t se aproxima de 2, o que ocorre com a posição da partícula?

4. Calcule:

a) $\lim_{t \rightarrow -2} \left[\frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{t^2 - t - 6} \vec{i} + \vec{j} \right]$

b) $\lim_{t \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{t}-1}{t-1} \vec{i} + (t-1)\vec{j} + (t+1)\vec{k} \right]$

5. Determinar a derivada das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t) = \cos^3(t)\vec{i} + \text{tg}(t)\vec{j} + \text{sen}^2(t)\vec{k}$

c) $\vec{f}(t) = e^{-t}\vec{i} + (1/e^{2t})\vec{j} + \vec{k}$

b) $\vec{f}(t) = \text{sen}(t)\cos(t)\vec{i} + e^{-2t}\vec{j}$

d) $\vec{f}(t) = \left(\frac{5t-2}{2t+1} \right) \vec{i} + \ln(1-t^2)\vec{j} + 5\vec{k}$

6. Determine as equações paramétricas da reta tangente ao gráfico de $r(t)$ no ponto em que $t = t_0$

a) $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + (2 - \ln t) \mathbf{j}$; $t_0 = 1$; b) $\mathbf{r}(t) = 2\cos\pi t \mathbf{i} + 2\text{sen}\pi t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$; $t_0 = 1/3$

7. Seja $\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 5\text{sen}(t)\vec{j} + 3\vec{k}$ o vetor posição de uma partícula em movimento no espaço. Determine os vetores velocidade e aceleração para qualquer instante t . Determinar, ainda, o módulo destes vetores no instante $t = \pi/4$.

8. Se $\vec{r}(t) = \cos(3t)\vec{i} + \text{sen}(3t)\vec{j}$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, mostrar que o vetor velocidade da partícula é *perpendicular* a $\vec{r}(t)$.

9. Um ponto move-se sobre uma curva C de modo que o vetor posição $\vec{r}(t)$ é igual ao vetor tangente $\vec{r}'(t)$, para todo t . Encontre as equações paramétricas de C .

10. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes é importante saber se eles vão colidir. Por exemplo, um míssil vai atingir seu alvo? Duas aeronaves vão colidir?. As curvas podem se interceptar mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição **no mesmo instante t**.

Suponha que as trajetórias de duas partículas P_1 e P_2 sejam dadas respectivamente pelas seguintes funções vetoriais

$$\vec{r}_1(t) = t^2 \vec{i} + (7t - 12) \vec{j} + t^2 \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2(t) = (4t - 3) \vec{i} + t^2 \vec{j} + (5t - 6) \vec{k}$$

- a) Encontre o instante em que as duas partículas colidem e a posição nesse instante.
b) Calcule o vetor velocidade de P_1 e o vetor aceleração de P_2 no instante da colisão.

11. Calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$ sendo dados:

a) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$, $P_0(1, 1)$ e \vec{u} é o versor de $(3, 4)$

b) $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$; $P_0(3, 3)$ e $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$; $P_0(3, 2)$ e $\vec{u} = \frac{5}{13} \vec{i} + \frac{12}{13} \vec{j}$

d) $f(x, y) = \sqrt{xy}$; $P_0(1, 4)$ e \vec{u} é o vetor que faz ângulo $\theta = \pi/3$ com o eixo OX

e) $f(x, y) = \operatorname{tg}(2x + y)$; $P_0(\pi/6, \pi/3)$ e \vec{u} é o vetor que faz ângulo $\theta = 7\pi/4$ com o eixo OX

f) $f(x, y, z) = x^3 y^2 z$; $P_0(1, 1, 1)$ e $\vec{u} = (1, 0, -1)$

g) $f(x, y, z) = y^2 \ln(x) + z^2$; $P_0(1, 4, 1)$; $\vec{u} = \vec{i} - 2 \vec{j} + \vec{k}$.

12. Determine o vetor posição $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ de uma partícula em movimento sabendo que o vetor tangente em cada ponto da sua trajetória é igual a ∇f , sendo $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ e que no instante inicial do movimento a partícula se encontrava no ponto $(1, 1)$.

13. Determine o gradiente de f no ponto indicado:

a) $f(x, y) = (x^2 + xy)^3$ $P(-1, -1)$.

b) $f(x, y) = y \ln(x + y)$ $P(-3, 4)$.

14. Esboce a curva de nível de f que passa por P e desenhe o vetor gradiente em P .

a) $f(x, y) = 4x - 2y + 3$; $P(1, 2)$.

b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$; $P(-2, 0)$.

15. Uma chapa de metal está situada em um plano xy , de modo que a temperatura T em (x, y) seja inversamente proporcional à distância da origem, e a temperatura em $P(3, 4)$ é 100°F .

a) Ache a taxa de variação de T em P na direção de $\vec{i} + \vec{j}$;

b) Em que direção T aumente mais rapidamente em P ?

c) Em que direção T decresce mais rapidamente em P ?

d) Em que direção a taxa de variação é nula?

16. Se um potencial elétrico em um ponto (x, y) do plano xy é $V(x, y)$ então o **vetor de intensidade elétrica** em um ponto (x, y) é $E = -\nabla V(x, y)$. Suponha que $V(x, y) = e^{-2x} \cos(2y)$. Determine o vetor intensidade elétrica em $\left(\frac{\pi}{4}, 0 \right)$ e verifique que, em cada ponto do plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor E .

17. O potencial elétrico V em um ponto $P(x,y,z)$ num sistema de coordenadas retangulares é dado por $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Determine a taxa de variação de V em $P(2, -1, 3)$ na direção de P para a origem. Determine a direção e sentido que produz taxa máxima de variação de V em P . Qual a taxa máxima de variação em P ?

18. Determine $\text{div } \mathbf{F}$ e $\text{rot } \mathbf{F}$ nos seguintes casos

a) $F(x,y,z) = x^2 \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + yz \mathbf{k}$

b) $F(x,y,z) = 7y^3z^2 \mathbf{i} - 8x^2z^5 \mathbf{j} - 3xy^4 \mathbf{k}$

c) $F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$

d) $F(x,y,z) = x^2z \mathbf{i} + y^2x \mathbf{j} + (y + 2z) \mathbf{k}$

19. Sendo $F(x,y,z) = 2x \mathbf{i} + \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}$ e $G(x,y,z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} - z \mathbf{k}$, calcule $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$

20. Sendo $F(x,y,z) = \text{sen}x \mathbf{i} + \cos(x-y) \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, calcule $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$

21. Sendo $F(x,y,z) = xy \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$, calcule $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$

22. Define-se o operador $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Se ∇^2 opera sobre $f(x,y,z)$ produz uma função escalar

chamada de **Laplaciano de f** , dada por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Mostre que o Laplaciano da função

$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ é zero, ou seja, a função satisfaz a **equação de Laplace** $\nabla^2 = 0$.

Funções que satisfazem a **equação de Laplace** são chamadas de **funções harmônicas** e desempenham papel importante nas aplicações físicas.

23. Ache um campo vetorial conservativo que tenha o potencial indicado

a) $f(x,y) = \text{arctg}(xy)$; b) $f(x,y,z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$; c) $f(x,y,z) = \text{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$

24. Confirme que $u(x,y)$ é uma função potencial de F

a) $u(x,y) = 2y^2 + 3x^2y - xy^3$ e $F(x,y) = (6xy - y^3) \mathbf{i} + (4y + 3x^2 - 3xy^2) \mathbf{j}$.

b) $u(x,y,z) = x \text{sen}z + y \text{sen}x + z \text{sen}y$ e $F(x,y,z) = (\text{sen}z + y \cos x) \mathbf{i} + (\text{sen}x + z \cos y) \mathbf{j} + (x \cos z + \text{sen}y) \mathbf{k}$.

25. Verifique se os campos vetoriais são conservativos e em caso afirmativo determine uma função potencial para os mesmos

a) $F(x,y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$

b) $F(x,y) = x^2 \mathbf{i} + 5xy^2 \mathbf{j}$

c) $F(x,y) = (\cos y + y \cos x) \mathbf{i} + (\text{sen}x - x \text{sen}y) \mathbf{j}$

d) $\vec{f} = (2x^2y^2z, 3x^2y^2z, x^2y^3 + y)$

e) $\vec{f} = (y \cos xy + ye^{xy}) \vec{i} + (x \cos xy + xe^{xy}) \vec{j} + \vec{k}$

f) $\vec{f} = (yz + \cos x) \vec{i} + (xz - \text{sen}y) \vec{j} + xy \vec{k}$

Respostas

1. a) segmento de reta; b) elipse no plano $y = 4$; c) parábola no plano $x = 1$; d) reta; e) parábola no plano $y = 2$
2. a) $2(t^2+t)\vec{i} + (t-t^2 + \text{sen}t)\vec{j} + \cos t \vec{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$. b) $t^2 + 2t^3 + (t-t^2)\text{sen}t, 0 \leq t \leq 2\pi$.
3. a) $(3, 1, 1)$ 4. a) \vec{j} . b) $(1/2)\vec{i} + 2\vec{k}$
5. a) $-3\cos^2(t)\text{sen}(t)\vec{i} + \sec^2(t)\vec{j} + 2\text{sen}(t)\cos(t)\vec{k}$. b) $(\cos^2(t) - \text{sen}^2(t))\vec{i} - 2e^{-2t}\vec{j}$.
c) $-e^{-t}\vec{i} - 2e^{-2t}\vec{j}$. d) $\left(\frac{9}{(2t+1)^2}\right)\vec{i} - \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)\vec{j}$.
6. a) $x = 1 + 2t; y = 2 - t;$ b) $x = 1 - \sqrt{3}\pi t; y = \sqrt{3} + \pi t; z = 1 + 3t$
7. $\vec{v}(t) = -2\text{sen}(t)\vec{i} + 5\cos(t)\vec{j}; \left|\vec{v}(\pi/4)\right| = \sqrt{29/2}; \vec{a}(t) = -2\cos(t)\vec{i} - 5\text{sen}(t)\vec{j}; \left|\vec{a}(\pi/4)\right| = \sqrt{29/2}$.
9. $x = ae^t; y = be^t; z = ce^t$, a, b e c constantes arbitrárias.
10. a) As partículas colidem no instante $t = 3$ e estão na posição $(9,9,9)$
b) $\vec{v}_1(3) = (6,7,6); \vec{a}_2(3) = (0,2,0)$
11. a) $-2/5$; b) zero; c) $-6/169$; d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ e) $2\sqrt{2}$. f) $\sqrt{2}$; g) $3\sqrt{6}$; 12. $\vec{r}(t) = (e^{-2t}, e^{-2t})$
13. a) $-36i-12j$; b) $4i+4j$.
14. a) a curva de nível é a reta $y = 2x$ e o vetor gradiente $(4, -2)$ b) a curva de nível é a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ e o gradiente $(-4,0)$
15. a) $-28/\sqrt{2}$; b) a direção de $-12i - 16j$; c) a direção de $12i + 16j$; d) a direção de $4i - 3j$.
16. $2e^{-\pi/2}\vec{i}$. 17. $\frac{-178}{\sqrt{14}}; 4i - 8j + 54k, \sqrt{2996}$; 18. a) $\text{div } F = 2x + y; \text{rot } F = z \vec{i}$
b) $\text{div } F = 0; \text{rot } F = (40x^2z^4 - 12xy^3)\vec{i} + (14y^3z + 3y^4)\vec{j} - (16xz^5 + 21y^2z^2)\vec{k}$
c) $\text{div } F = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \text{rot } F = \mathbf{0}$; d) $\text{div } F = 2xz + 2xy + 2; \text{rot } F = \vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$
19. 0; 20. 0; 21. $(1+y)\vec{i} + x\vec{j}$;
23. a) $F(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}\vec{i} + \frac{x}{1+x^2y^2}\vec{j}$; b) $F(x,y,z) = 2x\vec{i} - 6y\vec{j} + 8z\vec{k}$;
c) $F(x,y,z) = 2x \cos(x^2 + y^2 + z^2)\vec{i} + 2y \cos(x^2 + y^2 + z^2)\vec{j} + 2z \cos(x^2 + y^2 + z^2)\vec{k}$
25. a) conservativo; $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C$; b) e d) não conservativo
c) conservativo; $u(x,y) = x\cos y + y\text{sen}x + C$; e) conservativo; $u = \text{sen}xy + e^{xy} + z + C$
f) conservativo; $u = xyz + \text{sen}x + \cos y + C$