Universidade Salvador – UNIFACS
Cursos de Engenharia – Cálculo Avançado / Métodos Matemáticos / Cálculo IV
Profa: Ilka Freire

2ª Lista de Exercícios: Integrais Múltiplas 2009.2

1. Calcule $\iint_R f(x,y)\,dA$, sendo:

a) $f(x,y) = xe^{xy}$; $\quad R = \{(x,y) \in \Re^2 / 1 \le x \le 3 \text{ e } 0 \le y \le 1\}$.

b) $f(x,y) = x\cos(xy)$; $\quad R = \{(x,y) \in \Re^2 / 0 \le x \le 2 \text{ e } 0 \le y \le \pi/2\}$.

c) $f(x,y) = y\ln(x)$; $\quad R = \{(x,y) \in \Re^2 / 1 \le x \le 3 \text{ e } 0 \le y \le 1\}$.

d) $f(x,y) = 1/(x+y)$; $\quad R = \{(x,y) \in \Re^2 / 1 \le x \le 2 \text{ e } 1 \le y \le 2\}$.

e) $f(x,y) = \dfrac{y\ln x}{x}$; $\quad R = \{(x,y) \in \Re^2 / 1 \le x \le 2 \text{ e } -1 \le y \le 1\}$.

2. <u>Esboce</u> a região de integração e calcule as seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \int_x^{2x} (2x+4y)\,dydx$ b) $\int_0^2 \int_{-y}^{y} (xy^2+x)\,dxdy$ c) $\int_1^e \int_{\ln(x)}^{1} x\,dydx$

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dxdy$ e) $\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\,dydx$ f) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^{|x|} (x^2-2y^2)\,dydx$

3. <u>Esboce</u> a região de integração e inverta a ordem nas seguintes integrais:

a) $\int_0^4 \int_0^{y/2} f(x,y)\,dxdy$ b) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dydx$ c) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dydx$

4. Calcule:

a) $\iint_R (8-x-y)\,dxdy$, onde R é a região delimitada por $y = x^2$ e $y = 4$.

b) $\iint_R x\,dA$, sendo R a região interior ao círculo de centro na origem e de raio 2 e acima da reta $y = 1$, no 1º quadrante.

c) $\iint_R (x+y)\,dxdy$, onde *R* é a região delimitada por $y = x^2+1,\ y = -x^2-1,\ x = -1$ e $x = 1$.

d) $\iint_R (x+y)\,dxdy$, onde *R* é a região hachurada na figura 1.

e) $\iint_R e^{x^2}\,dxdy$, onde *R* é a região hachurada na figura 2.

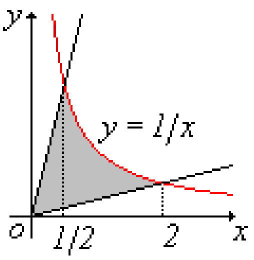


Figura 1.

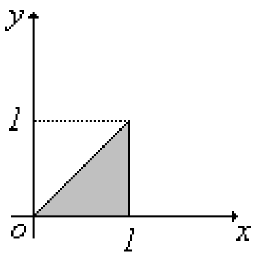


Figura 2.

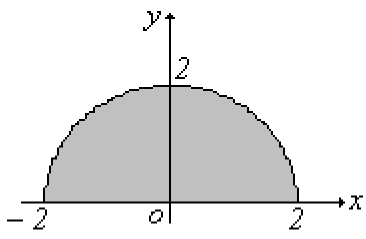


Figura 3.

5. Use coordenadas polares para calcular as seguintes integrais:

a) $\iint_R \left(x^2+y^2\right)^2 dxdy$, onde *R* é a região hachurada na figura 3 acima.

b) $\iint_R \left(8-x-y\right) dxdy$, sendo *R* delimitada por $x^2+y^2=1$. Interprete geometricamente.

c) $\iint_R \ln\left(x^2+y^2\right) dxdy$, sendo *R* o anel delimitado por $x^2+y^2=16$ e $x^2+y^2=25$.

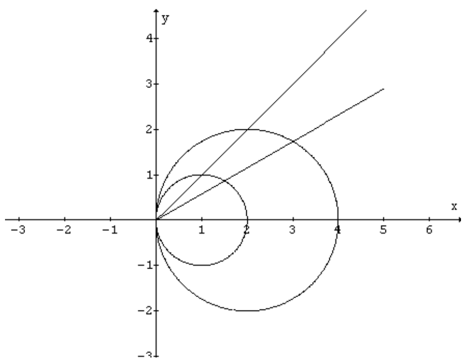
d) $\iint_R e^{2\left(x^2+y^2\right)} dxdy$, sendo *R* o círculo $x^2+y^2 \le 4$.

e) $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\, dA$, sendo R a região limitada pelas curvas

$r = 2\cos\theta$ (círculo de centro em (1,0) e raio 1);

$r = 4\cos\theta$ (círculo de centro em (2,0) e raio 2);

$\theta = \frac{\pi}{6}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$



6. Calcule o volume dos seguintes sólidos:

a) Sólido acima do plano *xy* delimitado pelo parabolóide $z = 4-2x^2-2y^2$. Esboce o sólido.

b) Sólido acima do plano *xy* delimitado lateralmente pelo cilindro $x^2+y^2=1$ e superiormente pelo parabolóide $z = x^2+y^2$. Esboce o sólido.

c) O tetraedro limitado no 1º octante pelo plano de equação $\frac{z}{3}+\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$

d) Sólido limitado inferiormente pelo plano xy, lateralmente por $x^2+y^2=4$ e superiormente por $y+z=8$.

e) Sólido acima do plano XY limitado pelo parabolóide $z=4-2x^2-2y^2$ e pelo plano $z = 2$.

f) Sólido limitado pelos parabolóides $z=x^2+y^2$ e $z=8-x^2-y^2$.

7. Calcule, usando *integral dupla*, a área da região *R* delimitada pelas curvas abaixo. Esboce os gráficos:

a) $y=x^3, y=-x+2$ e $y=0$.

b) exterior ao círculo $r = 2$ e interior ao círculo $r = 4\cos\theta$ (centro em (2,0) e raio 2);

8. Usando integral dupla, podemos calcular a massa (*M*) de uma lâmina plana não homogênea, com a forma de uma região (*R*) e com densidade de massa em um ponto (x,y) de *R*, dada pela função contínua $\rho = \rho(x,y)$, através da integral dupla $\boxed{M = \iint_R \rho(x,y)dA}$

a) Calcule a massa de uma lâmina com a forma de um círculo de raio *3 cm*, se a sua densidade de massa num ponto $P(x,y)$ é dada por $\rho(x,y)=k\left(x^2+y^2\right)$, *k* constate real.

b) Uma lâmina plana tem a forma da região delimitada pelas curvas $y=x^2+1$ e $y=x+3$. Sua densidade de massa no ponto $P(x,y)$ é proporcional a distância desse ponto ao eixo x. Calcule a massa dessa lâmina.

9. Calcule as integrais iteradas a seguir

a) $\int_0^3 \int_{-1}^0 \int_1^2 (x+2y+4z)dxdydz$; b) $\int_0^1 \int_{x+1}^{2x} \int_z^{x+z} xdydzdx$

10. Seja f(x,y,z) uma função contínua de três variáveis. Expresse $\iiint_Q f(x,y,z)dV$ como uma integral tripla iterada sendo Q a região do espaço:

a) limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 2$. (1ª integração em relação a z).

b) no 1º octante, limitada pelo plano $x + 2y + 3z = 6$. (1ª integração em relação a y).

c) limitada pelo parabolóide $z = 9 - 4x^2 - y^2$ e por $z = 0$. (1ª integração em relação a z).

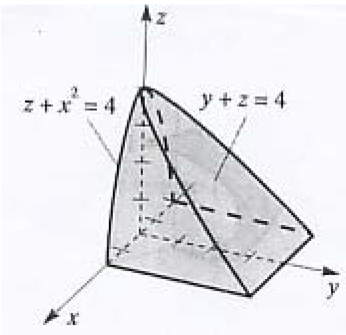
d) limitada pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$ (1ª integração em relação a x).

e) acima do plano XY limitada pela superfície cilíndrica $z = 16 - x^2$; e pelos planos $y = 0$ e $y = 2$. (1ª integração em relação a y)

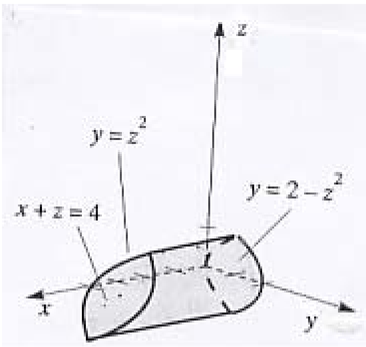
f) limitada pelo parabolóide $x^2 + y^2 = 3z$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. (1ª integração em relação a z)

11. Use integral tripla para encontrar o volume do sólido limitado pelas superfícies de equações:

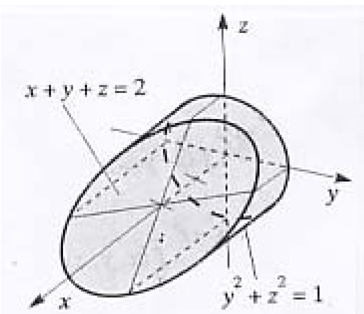
a) $z + x^2 = 4$; $y + z = 4$; $y = 0$ e $z = 0$.



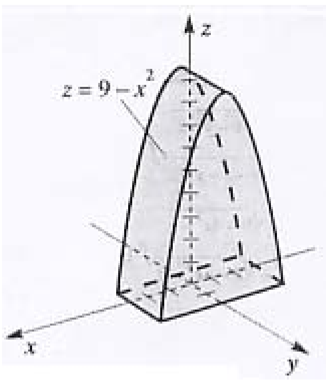
b) $y = 2 - z^2$; $y = z^2$; $x + z = 4$ e $x = 0$.



c) $y^2 + z^2 = 1$; $x + y + z = 2$ e $x = 0$.



d) $z = 9 - x^2$; $z = 0$; $y = -1$ e $y = 2$.



12.
Se um sólido tem massa m e volume V e a massa é distribuída uniformemente pelo sólido dizemos que o sólido é homogêneo e a densidade de massa δ se define como

$$\delta = \frac{m}{V} \quad \text{ou} \quad m = \delta V.$$

Num sólido não-homogêneo, por exemplo, constituído de metais diferentes, a massa não é a mesma em todo ele. Estabelecido um sistema de coordenadas no espaço, podemos definir a densidade de massa num ponto P(x,y,z) do sólido. Utilizando o mesmo processo do limite das somas, que foi aplicado na dedução das integrais triplas, pode-se mostrar que

$$m = \iiint_Q \delta(x, y, z)dV$$

a) Considere um sólido não-homogêneo que tem forma de um cilindro circular reto com raio da base **a** e altura **h.** encontre a massa desse sólido sabendo que a densidade em um ponto P é diretamente proporcional à distância de P a uma das bases, ou seja, δ(x,y,z) = kz, sendo k constante real.

b) Calcule a massa do sólido Q limitado acima do plano z = 2 pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, sabendo que sua densidade em cada ponto P(x,y,z) corresponde à distância do ponto ao plano z = 2.

Respostas

1. a) $e^3 - e - 2$ b) $4/\pi$ c) $(3/2)\ln 3 - 1$ d) $10\ln(2) - 6\ln(3)$; e) 0

2. a) 8/3; b) 0; c) $(e^2/4) - (3/4)$; d) 1/3; e) 0; f) –1/2

3. a) $\int_0^2 \int_{2x}^4 f(x,y)dydx$ b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy$ c) $\int_0^2 \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)dxdy + \int_2^3 \int_{y/3}^1 f(x,y)dxdy$

4. a) 896/15 b) 5/6 c) 0 d) 2 e) (e -1)/2

5. a) 32π/3; b) 8π. (Volume do tronco de um cilindro reto de raio de base 1 e limitado superiormente pelo plano de equação $z = 8 - x - y$); c) 2π[25ln(5) - 32ln(2) - (9/2)];
d) $(\pi/2)(e^8 - 1)$ e) $\frac{7}{9}(10\sqrt{2} - 11)$

6. a) 4π u.v; b) π/2 u.v; c) 1 u.v. d) 32π u.v. e) π u.v. f) 16π u.v.

7. a) 3/4 u.a. b) $(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3})$u.a. 8. a) $\frac{81k\pi}{2}$ b) 11,7*k*. 9. a) 39/2; b) –1/12;

10. a) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{2} f(x,y,z)\,dzdydx$ ou $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{0}^{2} f(x,y,z)\,dzdxdy$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{6-3z}\int_{0}^{(6-x-3z)/2} f(x,y,z)\,dydxdz$ ou $\displaystyle\int_{0}^{6}\int_{0}^{(6-x)/3}\int_{0}^{(6-x-3z)/2} f(x,y,z)\,dydzdx$

c) $\displaystyle\int_{-3/2}^{3/2}\int_{-\sqrt{9-4x^2}}^{\sqrt{9-4x^2}}\int_{0}^{9-4x^2-y^2} f(x,y,z)\,dzdydx$ ou $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}/2}^{\sqrt{9-y^2}/2}\int_{0}^{9-4x^2-y^2} f(x,y,z)\,dzdxdy$

d) $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{4-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dxdydz$ ou $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{4-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dxdzdy$

e) $\displaystyle\int_{-4}^{4}\int_{0}^{16-x^2}\int_{0}^{2} f(x,y,z)\,dydzdx$ ou $\displaystyle\int_{0}^{16}\int_{-\sqrt{16-z}}^{\sqrt{16-z}}\int_{0}^{2} f(x,y,z)\,dydxdz$

f) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dzdydx$ ou $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}}\int_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dzdxdy$

11. a) $\displaystyle 2\int_{0}^{4}\int_{0}^{4-y}\int_{0}^{\sqrt{4-z}} dxdzdy = \frac{128}{5}$; b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{z^2}^{2-z^2}\int_{0}^{4-z} dxdydz = \frac{32}{3}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{2-y-z} dxdzdy = 2\pi$; d) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-1}^{2}\int_{0}^{9-x^2} dzdydx = 108$

12. a) $m = kh^2a^2\,\pi/2$; b) $\dfrac{11\pi}{12}$ u.m.