Universidade Salvador – UNIFACS
Cursos de Engenharia – Cálculo Avançado / Métodos Matemáticos Aplicados / Cálculo IV

1ª Lista de Exercícios: Série de Fourier e Transformada de Laplace 2010.2

1) Use a definição $L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ para calcular as seguintes transformadas:

a) $f(t) = te^t$; b) $f(t) = \begin{cases} -1; & 0 \le t < 1 \\ 1; & t \ge 1 \end{cases}$

2) Usando a Tabela de Transformada e a linearidade calcule as transformadas das seguintes funções:

a) $f(t) = t^2 + 6t - 3$; b) $f(t) = (t+1)^3$; c) $f(t) = (1 + e^{2t})^2$; d) $f(t) = t^5 + \text{sen}3t - \cos \pi t$

3) Utilizando a Tabela de Transformadas e os resultados vistos **e**ncontre f(t), se L[f(t)] = F(s) é igual a

a) $F(s) = \dfrac{1}{s^3}$; b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s-2}$; c) $F(s) = \dfrac{1}{4s+1}$; d) $F(s) = \dfrac{5}{s^2 + 49}$;

e) $F(s) = \dfrac{4s}{4s^2+1}$; f) $F(s) = \dfrac{2s-6}{s^2+9}$; g) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+2s-3}$; h) $F(s) = \dfrac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}$

i) $F(s) = \dfrac{s^2-2}{s(s+1)(s-1)}$; j) $F(s) = \dfrac{s^2-2}{s^2(s+2)(s-3)}$; k) $F(s) = \dfrac{2}{s(s^2+2)}$

l) $F(s) = \dfrac{s-2}{s^2(s^2+2)}$; m) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s^2+4)}$; n) $F(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)^2+1}$; o) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+4s+13}$

p) $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2-2s+5)}$; q) $F(s) = \dfrac{(3s+3)}{s^2+2s+2}$; r) $F(s) = \dfrac{2s}{s^2+2s+2}$

4) Use as Transformadas de Laplace para resolver os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y''(t) + 9y(t) = 0$; $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$ b) $y''(t) + 2y'(t) - 8y(t) = 0$; $y(0) = 1$ e $y'(0) = 8$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{2t}$; $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + y = 1 + e^{-t}$; $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

e) $y''(t) - y(t) = \text{sen}t$; $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$ f) $y'' - y' = t$; $y(0) = y'(0) = 0$

5) Encontre a Transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $f(t) = (t-1)\,u_1(t)$; b) $f(t) = t\,u_1(t)$; c) $f(t) = e^{kt}u_a(t)$; d) $f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$

e) $f(t) = \text{sen}t\, u_\pi(t)$

6) Escreva as seguintes funções em termos da função degrau e encontre a transformada

a) $f(t) = \begin{cases} 0; & 0 < t < 1 \\ e^{t-1}; & t \geq 1 \end{cases}$; b) $f(t) = \begin{cases} 1; & 0 < t < 2 \\ (t-2)^2; & t \geq 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 0; & 0 < t < \pi \\ t-\pi; & \pi \leq t < 2\pi \\ 0; & t \geq 2\pi \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} 1; & 0 < t < 1 \\ (t-1)^3; & t \geq 1 \end{cases}$; e) $f(t) = \begin{cases} 0; & 0 < t < 1 \\ e^{-t}; & 1 \leq t < 2 \\ 0; & t \geq 2 \end{cases}$

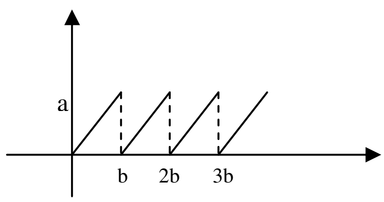
7) Encontre a transformada inversa das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{e^{-3s} - e^{-s}}{s}$; b) $F(s) = \dfrac{2e^{-as} - 1}{s}$; c) $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}$; d) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2 - s - 2}$

e) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2 - 9}$; f) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2(s+4)}$; g) $F(s) = \dfrac{(2s+2)\,e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 5}$

8) Use que se f é periódica de período p, então $L[f] = \dfrac{\int_0^p e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-ps}}$ para encontrar a transformada das seguintes funções:

a) $f(t) = t$; $t \in [0,1[$, f periódica de período 1. b)



Função dente de serra

9) Use as Transformadas de Laplace para resolver os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'(t) + 2y(t) = f(t)$, sendo $f(t) = \begin{cases} t; & 0 \le t < 1 \\ 0; & t \ge 1 \end{cases}$; $y(0) = 0$

b) $y''(t) + y(t) = f(t)$; em que $f(t) = \begin{cases} 0; & \text{se } 0 \le t < \pi \\ 1; & \text{se } \pi \le t < 2\pi \\ 0; & \text{se } t \ge 2\pi \end{cases}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$

c) $y'' + y = u_1(t)$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$;

d) $y' + y = f(t)$; sendo $f(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t < 1 \\ -1; & t \ge 1 \end{cases}$ e $y(0) = 0$;

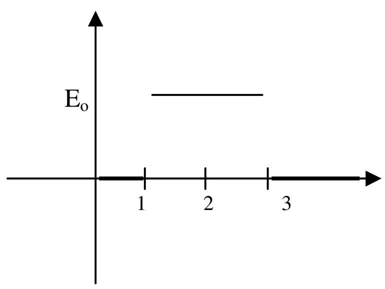
10) Use a transformada de Laplace para determinar:

a) A corrente elétrica num circuito LRC com $R = 10\Omega$, $L = 1$ H, $C = 10^{-2}$ F que está ligado a uma fonte de tensão $E(t) = \dfrac{t^3}{3}$ volts, supondo $i(0) = i'(0) = 0$

(Use a equação $L\dfrac{d^2i}{dt^2} + R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}i = \dfrac{dE}{dt}$)

b) A carga no capacitor em um circuito em série RC, sabendo que $q(0) = 0$, $R = 50\Omega$, $C = 0{,}01$ farad e $E(t)$ é a voltagem dada na diagrama ao lado

(Use a equação: $R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{c}q = E(t)$)



c) A carga $q(t)$ no capacitor em um circuito LRC, em série, quando $L = 1$ H, $R = 20\ \Omega$, $C = 0{,}005$ F, $E(t) = 150$ V, $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$.

(Use a equação $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = E(t)$)

11) As funções a seguir são periódicas de período 2π. Dê um esboço do gráfico e a série de Fourier correspondente.

a) $f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \le x \le \pi \\ 0; & \pi < x < 2\pi \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} -1; & 0 < x < \pi \\ 1; & \pi < x < 2\pi \end{cases}$; c) $f(x) = \begin{cases} x; & 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x; & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

d) f(x) = x; se $0 < x < 2\pi$;

12) Esboce o gráfico das seguintes funções e encontre a correspondente série de Fourier. Identifique os pontos de descontinuidade, se existirem, e dê a soma da série nesses pontos.

a) $f(x) = \begin{cases} 8; & 0 < x < 2 \\ -8; & 2 < x < 4 \end{cases}$; período 2L = 4; b) $f(x) = \begin{cases} -x; & -4 \le x \le 0 \\ x; & 0 < x < 4 \end{cases}$; período 2L = 8

c) $f(x) = \begin{cases} 2x; & 0 \le x \le 3 \\ 0; & -3 < x < 0 \end{cases}$; período 2L = 6; d) f(x) = 4x; $0 < x < 10$; período 2L = 10

13) Dê um prolongamento par e encontre a série de cossenos das seguintes funções

a) $f(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0; & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$; b) f(x) = 2x − 1; $0 < x < \pi$

14) Dê um prolongamento ímpar e encontre a série de senos das seguintes funções

a) f(x) = 4 − x; $0 < x < 4$; b) f(x) = − x ; $0 < x < 1$

Respostas:

1) a) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2}$; b) $F(s) = \dfrac{2e^{-s} - 1}{s}$

2) a) $F(s) = \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{6}{s^2} - \dfrac{3}{s}$; b) $F(s) = \dfrac{6}{s^4} + \dfrac{6}{s^3} + \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{1}{s}$; c) $F(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s-4} + \dfrac{2}{s-2}$;

d) $F(s) = \dfrac{5!}{s^6} + \dfrac{3}{s^2+9} - \dfrac{s}{s^2+\pi^2}$

3) a) $f(t) = \dfrac{t^2}{2}$; b) $f(t) = t - 1 + e^{2t}$; c) $f(t) = \dfrac{e^{-t/4}}{4}$; d) $f(t) = \dfrac{5}{7}\text{sen}7t$; e) $f(t) = \cos(t/2)$

f) $f(t) = 2\cos 3t - 2\text{sen}3t$; g) $f(t) = \dfrac{3e^{-3t} + e^t}{4}$; h) $f(t) = \dfrac{e^{2t}}{2} - e^{3t} + \dfrac{e^{6t}}{2}$

i) $f(t) = \dfrac{4 - e^{-t} - e^t}{2}$; j) $f(t) = -\dfrac{1}{18} + \dfrac{t}{3} - \dfrac{e^{-2t}}{10} + \dfrac{7e^{3t}}{45}$; k) $f(t) = 1 - \cos(\sqrt{2}t)$

l) $f(t) = \dfrac{1}{2} - t - \dfrac{\cos\sqrt{2}t}{2} + \dfrac{\text{sen}\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}$; m) $f(t) = \dfrac{e^t}{5} - \dfrac{\cos 2t}{5} - \dfrac{\text{sen}2t}{10}$;

n) $f(t) = e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\,\text{sen}\,t$; o) $f(t) = 2e^{-2t}\cos 3t - e^{-2t}\,\text{sen}\,3t$;

p) $f(t)=\frac{1}{5}(1-e^{t}\cos 2t+\frac{1}{2}e^{t}\text{sen}2t)$; q) $f(t)=3e^{-t}\cos t$; r) $f(t)=2e^{-t}\cos t-2e^{-t}\text{sent}$

4) a) $y = (2/3)\text{sen}3t$; b) $y = 2e^{2t} - e^{-4t}$; c) $y = te^{2t}$; d) $y = 1 + (1/4)e^{-t} + (1/2)te^{t} - (1/4)e^{t}$

e) $y = (5/4)e^{t} - (1/4)e^{-t} - (1/2)\ \text{sent}$; f) $y=-1-t-\frac{t^2}{2}+e^{t}$

5) a) $L[f] = \frac{e^{-s}}{s^2}$; b) $L[f]=e^{-s}(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s})$; c) $L[f]=\frac{e^{a(k-s)}}{s-k}$;

d) $L[f]=\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s^2}-\frac{e^{-3s}}{s}$; e) $L[f]=\frac{-e^{-\pi s}}{s^2+1}$

6) a) $f(t)=e^{t-1}u_1(t); L[f(t)]=\frac{e^{-s}}{s-1}$; b) $f(t)=1-u_2(t)+(t-2)^2u_2(t)$;

$L[f(t)]=\frac{1}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{2!}{s^3}e^{-2s}$; c) $f(t)=(t-\pi)\left(u_\pi(t)-u_{2\pi}(t)\right)$; $L[f(t)]=\frac{e^{-\pi s}}{s^2}-\frac{e^{-2\pi s}}{s^2}-\pi\frac{e^{-2\pi s}}{s}$

d) $f(t)=1-u_1(t)+(t-1)^3u_1(t)$; $L[f(t)]=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{3!}{s^4}e^{-s}$;

e) $f(t)=e^{-t}(u_1(t)-u_2(t))$; $L[f(t)]=\frac{e^{-(s+1)}}{s+1}-\frac{e^{-2(s+1)}}{s+1}$

7) a) $f(t) = u_3(t) - u_1(t)$; b) $f(t) = 2u_a(t) - 1$; c) $f(t) = u_\pi(t)(1 - \cos(t - \pi))$;

d) $f(t)=u_2(t)\left(\frac{e^{2(t-2)}-e^{-(t-2)}}{3}\right)$; e) $f(t)=u_1(t)\left(\frac{\text{senh}(3(t-1))}{3}\right)$;

f) $f(t)=\left(-\frac{1}{16}+\frac{t-1}{4}+\frac{e^{-4(t-1)}}{16}\right)u_1(t)$; g) $f(t)=\left(2e^{-(t-\pi)}\cos 2(t-\pi)\right)u_\pi(t)$

8) a) $L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-s}}\left(-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right)$ b) $L[f]=\frac{a}{s}(\frac{1}{bs}-\frac{1}{e^{bs}-1})$

9) a) $y=-\frac{1}{4}+\frac{t}{2}+\frac{e^{-2t}}{4}-\frac{u_1(t)}{4}-\frac{(t-1)u_1(t)}{2}+\frac{e^{-2(t-1)}u_1(t)}{4}$

b) $y=\text{sen}\,t+[1-\cos(t-\pi)u_\pi(t)]-[1-\cos(t-2\pi)u_{2\pi}(t)]$

c) $y=\cos t+\left(1-\cos(t-1)\right)u_1(t)$ **;** d) $y=1-e^{-t}-2\left(1-e^{-(t-1)}\right)u_1(t)$

10) a) $i(t)=\frac{t^2}{100}-\frac{t}{500}+\frac{\sqrt{3}e^{-5t}\mathrm{sen}5\sqrt{3}t}{7500}$;

b) $q(t)=\frac{E_0}{100}\left((1-e^{-2(t-1)})u_1(t)-(1-e^{-2(t-3)}u_3(t)\right)$

c) $q(t)=150\left(\frac{1}{200}-\frac{1}{200}e^{-10t}\cos 10t+\frac{1}{200}e^{-10t}\mathrm{sen}10t\right)$

11) a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_1\frac{\mathrm{sen}(2n-1)x}{(2n-1)}$; b) $-\frac{4}{\pi}\sum_1\frac{\mathrm{sen}(2n-1)x}{(2n-1)}$; c) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_1\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$;

d) $\pi-2\sum_1\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}$;

12) a) $\frac{32}{\pi}\sum_1\frac{1}{(2n-1)}\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$; f é descontínua nos pontos da forma x = 2k ($k\in Z$) e nesses pontos s(x) =0 ; b) $2-\frac{16}{\pi^2}\sum_1\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{4}\right)$; não existem descontinuidades

c) $\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_1\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{3}\right)-\frac{6}{\pi}\sum_1\frac{(-1)^n}{n}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$; f é descontínua nos pontos da forma x = 3(2k+1) ($k\in Z$) e nesses pontos s(x) = 3;

d) $20-\frac{40}{\pi}\sum_1\frac{1}{n}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$; f é descontínua nos pontos da forma x = 10k ($k\in Z$) e nesses pontos s(x) = 20

13) a) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_1\frac{\mathrm{sen}(n\pi/2)}{n}\cos(nx)$; b) $f(x)=\pi-1-\frac{8}{\pi}\sum_1\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

14) a) $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_1\frac{\mathrm{sen}(n\pi x/4)}{n}$ **;** b) $f(x)=2\sum_1\frac{(-1)^n}{n\pi}\mathrm{sen}(n\pi x)$