Representação Gráfica de uma Superfície

Para representar graficamente uma superfície procede-se como segue:

1. Escolhe-se um plano coordenado.
2. Determina-se as interseções com os eixos cartesianos determinando os pontos $(x, 0, 0),\ (0, y, 0)$ *e* $(0, 0, z)$.
3. Determina-se os traços das superfícies sobre os planos;

   a) xy fazendo $z = 0$ na equação;

   b) xz fazendo $y = 0$ na equação;

   c) yz fazendo $x = 0$ na equação.

4. Determina-se as simetrias:

   a) em relação aos planos coordenados.

   - Uma superfície é simétrica em relação ao plano xy se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, y, -z)$.
   - Uma superfície é simétrica em relação ao plano xz se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, -y, z)$.
   - Uma superfície é simétrica em relação ao plano yz se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, y, z)$.

   b) em relação aos eixos coordenados

   - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo x se para quaquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, -y, -z)$.
   - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo y se para quaquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, y, -z)$.
   - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo z se para quaquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, -y, z)$.

   c) em relação à origem:

   - Uma superfície é simétrica em relação à origem se para quaquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, -y, -z)$.

5. Secções e Extensão: Quando os traços principais não forem suficientes para caracterização da superfície, recorre-se a determinação de secções com planos paralelos aos planos coordenados. Para isso fazemos:

    - $z = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(x, y, k) = 0$ sobre o plano coordenado xy.
    - $y = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(x, k, z) = 0$ sobre o plano coordenado xz.
    - $x = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(k, y, z) = 0$ sobre o plano coordenado zy.

6. Traça-se o esboço do gráfico da superfície.

Exemplo 2.5. *Traçar o esboço do gráfico da superfície de equação*

$-$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1.$$

Solução:

1. Vamos tomar como plano coordenado o plano xz.

2. Interseções com os eixos coordenados : Os pontos $(x, 0, 0)$ e $(0, 0, z)$ não são reais e o ponto $(0, y, 0)$ é duplo ou seja temos os pontos $P(0, 4, 0)$ e $P'(0, -4, 0)$.

3. Traços:

    - Sobre o plano xy: Fazendo $z = 0$ tem-se a hipérbole $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

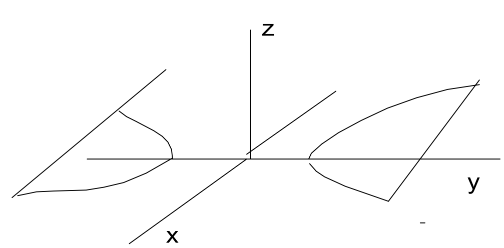

Figura 2.2: Traços sobre xy

- Sobre o plano xz: Fazendo $y = 0$ tem-se a elipse imaginária $-\frac{x^2}{5^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$.
- Com o plano zy: Fazendo $x = 0$ tem-se a hipérbole $\frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$.

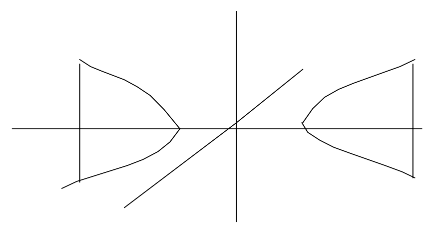

Figura 2.3: Traços sobre yz

4. Simetrias: Explicitamente a equação $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$ pode ser escrita como segue:

   $y = 4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}}$ ou $y = -4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}}$

   Logo, é simétrica em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem:

5. Secções e extensões: fazendo $z = k,\ k \in R$, obtemos uma família de hipérboles sobre os planos $z = k$. Por outro, lado fazendo $y = k,\ k \in R$, obtemos uma família de elipses sobre os planos $z = k$. (fazendo $x = k$ as curvas são imaginárias).

   - Por exemplo,fazendo $z = k = 3$ temos as equações

   $y = 4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{3^2}{3^2}}$ ou $y = -4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{3^2}{3^2}}$

   donde vem a equação da hipérbole sobre o plano $z = 3$ dada por

   $y = \sqrt{2 + \frac{x^2}{5^2}}$ ou $y = -\sqrt{2 + \frac{x^2}{5^2}}$

- Por exemplo, fazendo $y = k = \pm 8$ temos a equação elíptica

  $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{(\pm 8)^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1 \Longrightarrow -\frac{x^2}{5^2} + 4 - \frac{z^2}{3^2} = 1 \Longrightarrow 3 = \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}$
  sobre os planos $y = 8$ e $y = -8$.

  Construção da superfície.

  Os elementos fornecidos pela discussão acima permitem construir a superfície hipebólica de duas folhas conforme a figura 2.6.

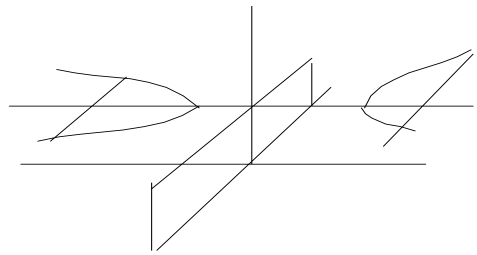

Figura 2.4: Traços sobre o plano z=3

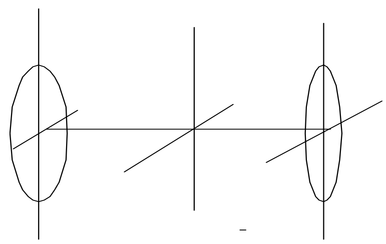

Figura 2.5: Traços sobre o plano y=8

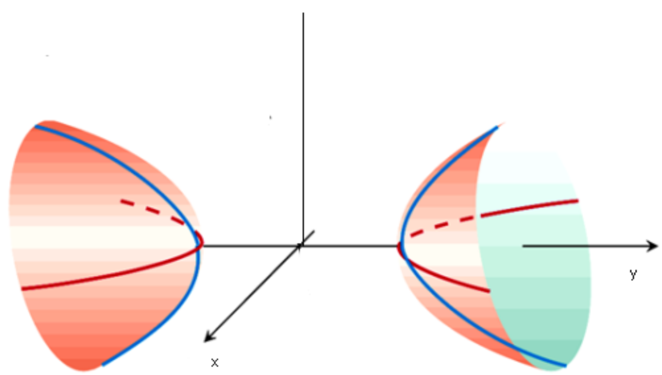

Figura 2.6:

Exercícios

Discutir e representar graficamente as superfícies

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

2. $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

3. $9x + 4y + 12z = 36$