UNIFACS UNIVERSIDADE SALVADOR LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES®	**EETI – Escola de Engenharia e TI**

PRIMEIRA AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

DISCIPLINA: Cálculo II	CURSO: Engenharia Civil
PROFESSOR: Adriano Cattai	SEMESTRE: 2013.2
VALOR TOTAL: $10,0$ (dez pontos)	DATA: ____ / ____ / _______
ALUNO(A): ____	MATRÍCULA: ________________

LEIA COM ATENÇÃO AS SEGUINTES INSTRUÇÕES E OBSERVAÇÕES

1. Após receber a avaliação se o aluno desistir de fazer a avaliação não terá direito à segunda chamada;
2. Assim que receber a folha de questões o aluno deve preencher o cabeçalho com seu nome completo. Também deve colocar seu nome completo na folha de papel pautado. Não é permitido utilizar outras folhas de papel além das fornecidas pelo professor, devidamente assinadas;
3. As soluções e respostas das questões devem ser feitas na folha de papel pautado. Não serão aceitas respostas na folha de questões. Rasuras nas questões de múltipla escolha anulam a questão;
4. A folha de questões deve ser devolvida com a folha de respostas;
5. A avaliação deve ser feita a caneta azul ou preta. Respostas a lápis ou ilegíveis não serão consideradas na correção;
6. Todas as questões discursivas serão corrigidas levando em conta: coerência das ideias, capacidade de argumentação, de análise e síntese;
7. A avaliação é sem consulta e individual. Consultas a material escrito (caderno, apontamentos, livros, papéis, etc.), equipamento eletrônico (PDA's, agendas, arquivos em calculadora, celulares, notebooks, etc.) e/ou a colegas não são permitidas. A interpretação faz parta da avaliação;
8. Os celulares e equipamentos diversos de telefonia móvel ou eletrônicos, com ou sem acesso a internet, devem permanecer desligados e guardados dentro de bolsas ou na mesa do professor;
9. Não é permitido utilizar estojos e colocar objetos no colo. As bolsas devem ser guardadas embaixo da carteira. O aluno deve ter em mãos apenas o material necessário (lápis, caneta, borracha, régua);
10. Caso o aluno seja flagrado portando qualquer aparelho eletrônico, ou descumprindo as regras estabelecidas, sua avaliação será recolhida e atribuída nota zero.

Mensagem:
"O saber a gente aprende com os mestres e os livros. A sabedoria, se aprende é com a vida e com os humildes." (Cora Coralina)

Sucesso e Boa Prova!

QUESTÕES

***Q.* 1** (2,0)**.** Atividade antecipada em nossa quinta aula.

***Q.* 2** (0,9 + 0,9)**.** Determine cada integral indefinida abaixo:

(a) $\int e^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x$; (b) $\int \dfrac{5x^3-3x^2-7x-7}{x^4+x^3-x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$;

(a) Integração por parte. Existe um exemplo idêntico na apostila ou no seu caderno.

(b) Note que o grau do numerador é menor do que o grau do denominador. Assim, não precisamos realizar a divisão entre polinômios. Vamos fatorar o denominador para decompor a fração numa soma de frações parciais. Note que $x = 1$ é uma raiz, pois $1^4 + 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = 0$. Assim, por uma simples divisão, temos:

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = (x-1)(x^3 + 2x^2 + x + 2) = (x-1)[x^2(x+2) + 1(x+2)] = (x-1)(x^2+1)(x+2).$$

Deste modo, a decomposição será dada por: $\dfrac{5x^3-3x^2-7x-7}{x^4+x^3-x^2+x-2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{C}{x-1} + \dfrac{D}{x+2}$. Reduzindo ao mesmo denominador e resolvendo o sistema, obtemos $A = 4$, $B = 0$, $C = -2$ e $D = 3$. Portanto,

$$\int \frac{5x^3-3x^2-7x-7}{x^4+x^3-x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x+2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\ln|x^2+1| - 2\cdot\ln|x-1| + 3\cdot\ln|x+2| + K,$$

em que, a primeira integral foi obtida pela mudança de variável $y = x^2 + 1$ e, as duas outras, porintegração imediata.

***Q.* 3** (0,9 + 0,9)**.** Determine cada integral definida abaixo:

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{x-6}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

Para cada integral, vamos obter uma primitiva. Para tanto, perceba os seguintes ajustes:

(a1) $\displaystyle\int \frac{x-6}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-6}{x^2+6x+9+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+3-9}{(x+3)^2+1}\,\mathrm{d}x$;

(b1) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{(e^x)^2+1}{e^x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}\,\mathrm{d}x.$

Assim, para (a1) faremos a mudança de variável $y = x + 3$, com $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ e, para (b1) $y = e^x$, com $\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x$. Realizando essas mudanças temos:

$$\begin{aligned}
\text{(a2)}\quad \int \frac{x-6}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{y-9}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y - 9\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| - 9\operatorname{arctg}(y) + K \\
&= \frac{1}{2}\ln|(x+3)^2+1| - 9\operatorname{arctg}(x+3) + K;
\end{aligned}$$

(b2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg}(y) + k = \operatorname{arctg}(e^x) + k.$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\text{(a)}\quad \int_{-3}^{-2} \frac{x-6}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{2}\ln|(x+3)^2+1| - 9\operatorname{arctg}(x+3)\right)\Big|_{-3}^{-2} \\
&= \frac{1}{2}\ln|(-2+3)^2+1| - 9\operatorname{arctg}(-2+3) - \left(\frac{1}{2}\ln|(-3+3)^2+1| - 9\operatorname{arctg}(-3+3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln|2| - 9\operatorname{arctg}(1) - \left(\frac{1}{2}\ln|1| - 9\operatorname{arctg}(0)\right) = \ln(\sqrt{2}) - \frac{9\pi}{4};
\end{aligned}$$

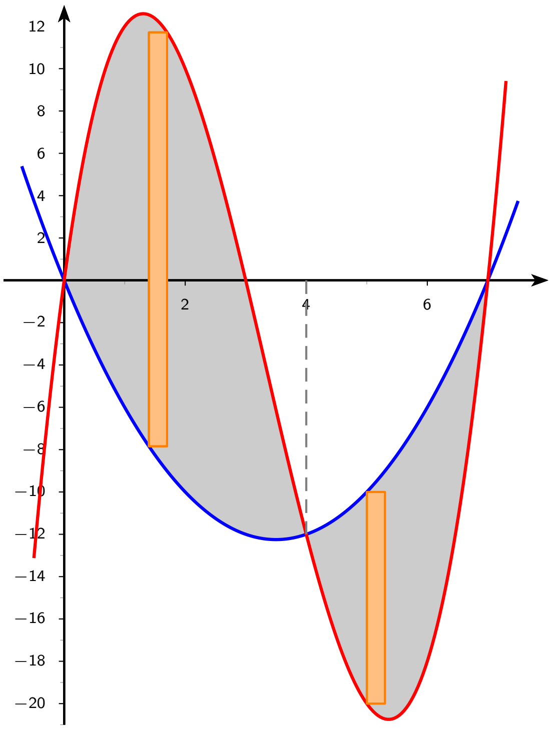
(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(e^x)\Big|_1^0 = \operatorname{arctg}(e) - \operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{4}.$

***Q.* 4** (2,0)**.** Além de reconhecer/esboçar a região limitada pelas curvas $y = x^2 - 7x$ e $y = x^3 - 10x^2 + 21x$, determine sua área apresentando o elemento de área $\mathrm{d}A$.

Denotando as curvas por $f(x) = x^2 - 7x$ e $g(x) = x^3 - 10x^2 + 21x$ e, resolvendo a equação $f(x) = g(x)$ para obter as interseções entre os gráficos, temos:

$$x^2 - 7x = x^3 - 10x^2 + 21x \Leftrightarrow x^3 - 11x^2 + 28x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x-7) = 0.$$

Assim, as curvas se interseptam nos pontos $(0,0)$, $(4,-12)$ e $(7,0)$.



A função $f(x) = x^2 - 7x = x(x-7)$ representa uma parábola com convidade voltada para cima, com raízes 0 e 7.

Para a função $g(x) = x^3 - 10x^2 + 21x = x(x^2 - 10x + 21) = x(x-3)(x-7)$, vemos que 0, 3 e 7 são suas raízes. Ao lado suas representações gráficas.

Os elementos de área, são:

$$\mathrm{d}A_1 = [x^3 - 10x^2 + 21x - (x^2 - 7x)]\ \mathrm{d}x, \quad \text{se} \quad x \in [0,4]$$

$$\mathrm{d}A_2 = [x^2 - 7x - (x^3 - 10x^2 + 21x)]\ \mathrm{d}x, \quad \text{se} \quad x \in [4,7]$$

Assim, podemos escrever:

$$A_1 = \int_0^4 \mathrm{d}A_1 \quad \text{e} \quad A_2 = \int_4^7 \mathrm{d}A_2\,.$$

Por fim, $A = A_1 + A_2$, como segue abaixo:

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 = \int_0^4 \mathrm{d}A_1 + \int_4^7 \mathrm{d}A_2 = \int_0^4 x^3 - 10x^2 + 21x - (x^2 - 7x)\ \mathrm{d}x + \int_4^7 x^2 - 7x - (x^3 - 10x^2 + 21x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 x^3 - 11x^2 + 28x\ \mathrm{d}x + \int_4^7 -x^3 + 11x^2 - 28x\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{11x^3}{3} + 14x^2\right)\Bigg|_0^4 + \left(\frac{-x^4}{4} + \frac{11x^3}{3} - 14x^2\right)\Bigg|_4^7 \\
&= \frac{4^4}{4} - \frac{11\cdot 4^3}{3} + 14\cdot 4^2 - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{11\cdot 0^3}{3} + 14\cdot 0^2\right) + \frac{-7^4}{4} + \frac{11\cdot 7^3}{3} - 14\cdot 7^2 - \left(\frac{-4^4}{4} + \frac{11\cdot 4^3}{3} - 14\cdot 4^2\right) \\
&= \ldots = \frac{160}{3} + \frac{99}{4} = \frac{937}{12} u.a.
\end{aligned}$$

***Q.* 5** (1,2)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Avalie cada afirmativa que segue:

(♣) Para todo $a \neq 0$, tem-se $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$;

(♡) Para quaisquer a e b tais que $a < b$, tem-se $\displaystyle\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$;

(✠) Se f for uma função constante, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ é igual ao produto entre f e o número $b - a$, em que $a < b$.

É correto o que se afirma em:

(a) Apenas (♣); (b) Apenas (♣) e (♡); (c) Apenas (♡) e (✠); (d) (♣), (♡) e (✠).

Do contra-exemplo $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^2 \ \mathrm{d}x = x^3\Big|_{-1}^{1} = 1^3 - (-1)^3 = 2$, temos que (♣) é falso. Por exclusão podemos garantir que é correto o que se afirma em (c). Caso não queira seguir nesa linha, basta notar que (♡) e (✠) são verdadeiras pois são propriedades da integral definida.

***Q.* 6** (1,2)**.** Quanto a integral definida, podemos afirmar que:

(a) Ela sempre representa uma área;

(b) Ela representa uma família de primitivas;

(c) Ela será positiva, independente do integrando e dos limites de integração.

(d) Ela será um número, podendo ser positivo, negativo ou nulo.

Por definição, a integral definida é a soma de Riemann $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$ (com infinitas parcelas). Como cada $f(x_i)$ é um número real (podendo ser positivo, negativo ou nulo) e Δx é número real positivo daí, concluímos que a alternativa verdadeira é a (d). Este argumento invalida as outras três opções.

Só isso.

Obrigado!