UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Integral (EC-MR02) SEMESTRE: 2010.2

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 13/10/2010

NOME: ______________________________

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM (PARTE A)

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"O mundo é um lugar perigoso de se viver, não por causa daqueles que fazem o mal, mas sim por causa daqueles que observam e deixam o mal acontecer." (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q. 1 (3,0)***.*** Resolva apenas **três** integrais das listadas a seguir.

(a) $\displaystyle\int \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int e^x \mathrm{sen}(x)\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)^3}}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{8x^2+3x+20}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \ln(\sqrt{x^2+2x})\,dx$ (d) $\displaystyle\int \sec^3(x)\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-25}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\,dx$

(a) Como $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, podemos fazer a mudança de variável $u = \frac{1}{x}$, daí:

$$\int \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = -\int 1 - e^u\,du = -u + e^u + K = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} + K.$$

(b) Integrando por partes, pondo $u = \ln(\sqrt{x^2+2x})$ e $dv = dx$, temos $du = \frac{x+1}{x^2+2x}dx$ e $v = x$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \ln(\sqrt{x^2+2x})\,dx &= \ln(\sqrt{x^2+2x})\cdot x + K_1 - \int x\cdot\frac{x+1}{x(x+2)}\,dx = x\cdot\ln(\sqrt{x^2+2x}) + K_1 - \int\frac{x+1}{x+2}\,dx\\ &= x\cdot\ln(\sqrt{x^2+2x}) + K_1 - \int\frac{x+2-1}{x+2}\,dx = x\cdot\ln(\sqrt{x^2+2x}) - \int\frac{x+2}{x+2} + \int\frac{1}{x+2}\,dx\\ &= x\cdot\ln(\sqrt{x^2+2x}) - x + \ln|x+2| + K.\end{aligned}$$

(c) Novamente por partes. Pondo $u = \mathrm{sen}(x)$ e $dv = e^x dx$, temos $du = \cos(x)dx$ e $v = e^x$. Assim,

$$\int e^x\mathrm{sen}(x)\,dx = e^x\mathrm{sen}(x) + K_1 - \int e^x\cos(x)dx.$$

A integral do segundo membro, também é resolvida por partes, com $\overline{u} = \cos(x)$ e $d\overline{v} = e^x dx$. Temos:

$$\int e^x\mathrm{sen}(x)\,dx = e^x\mathrm{sen}(x) + K_1 - \left[e^x\cos(x) + K_2 + \int e^x\mathrm{sen}(x)\,dx\right] = \frac{e^x\mathrm{sen}(x) - e^x\cos(x)}{2} + K.$$

(d) Está resolvida na apostila!

(e) Pela substituição trigonométrica $x = 2\mathrm{sen}(\theta)$, temos $dx = 2\cos(\theta)d\theta$. Daí,

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx &= \int\frac{4\mathrm{sen}^2(\theta)}{\sqrt{(4\cos^2(\theta))^3}}\cdot 2\cos(\theta)d\theta = \int\frac{4\mathrm{sen}^2(\theta)}{8\cos^3(\theta)}\cdot 2\cos(\theta)d\theta\\ &= \int \mathrm{tg}^2(\theta)d\theta = \int \sec^2(\theta) - 1 d\theta = \mathrm{tg}(\theta) - \theta + K.\end{aligned}$$

Como $x = 2\text{sen}(\theta)$, temos que $\theta = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\text{tg}(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Logo,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + K.$$

(f) Pela substituição trigonométrica $x = 5\sec(\theta)$, temos $dx = 5\sec(\theta)\text{tg}(\theta)d\theta$ e $x^2 - 25 = 25\sec^2(\theta) - 25 = 25(\sec^2(\theta) - 1) = 25\text{tg}^2(\theta)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-25}}\,dx &= \int \frac{5\sec(\theta)\text{tg}(\theta)}{5^3\sec^3(\theta)\sqrt{25\text{tg}^2(\theta)}}d\theta = \frac{1}{125}\int \cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{125}\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta \\
&= \frac{1}{250}\left[\int 1d\theta + \int \cos(2\theta)d\theta\right] = \frac{1}{250}\left[\theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right] + K = \frac{1}{250}\left[\theta + \text{sen}(\theta)\cos(\theta)\right] + K \\
&= \frac{1}{250}\left[\text{arcsec}\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\cdot\frac{5}{x}\right] + K = \frac{1}{250}\left[\text{arcsec}\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{5\sqrt{x^2-25}}{x^2}\right] + K.
\end{aligned}$$

(g) Percebemos que é uma função racional própria. Assim, escrevemos:

$$\frac{8x^2+3x+20}{x^3+x^2+4x+4} = \frac{8x^2+3x+20}{x^2(x+1)+4(x+1)} = \frac{8x^2+3x+20}{(x^2+4)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x+1}.$$

Donde $8x^2 + 3x + 20 = (Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 4)$. Resolvendo este sistema, obtemos $A = 3$, $B = 0$, $C = 5$. Desta forma

$$\int \frac{8x^2+3x+20}{x^3+x^2+4x+4}\,dx = \int \frac{3x}{x^2+4}dx + \frac{5}{x+1}\,dx.$$

Para a primeira integral do segundo membro, pondo $u = x^2 + 4$, temos $du = 2xdx$. Logo

$$\int \frac{3x}{x^2+4}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{3}{2}\ln(u) + K_1 = \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + K_1.$$

Portanto,

$$\int \frac{8x^2+3x+20}{x^3+x^2+4x+4}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+4)+K_1+5\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+4)+5\ln(x+1)+K = \ln\left((x+1)^5\cdot\sqrt{(x^2+4)^3}\right)+K.$$

(h) Com a mudança de variável $x = u^3$, temos $dx = 3u^2du$ e

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\,dx = \int \frac{3u^2}{\sqrt{1+u}}\,du.$$

Com um nova mudança de variável, $1 + u = v^2$, temos $du = 2vdv$. Daí,

$$\int \frac{3u^2}{\sqrt{1+u}}\,du = \int \frac{3(v^2-1)2v}{\sqrt{v^2}}\,dv = 6\int (v^2-1)v\,dv = \ldots$$

Q. 2 (1,5)**.** Encontre a primitiva $F(x)$ da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2x}$ tal que $F(2) = \dfrac{\pi}{2} + 1$. Obtenha $F'(x)$ e mostre que $F'(x) = f(x)$.

Como F é uma primitiva de f, então $F(x) = \displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{\sqrt{x-1}}{2x}dx$. Através da mudança de variável, $u^2 = x-1$, donde $2udu = dx$, temos:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{\sqrt{u^2}}{2(u^2+1)}2udu = \int \frac{u^2}{u^2+1}du = \int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}du = \int 1du - \int \frac{1}{u^2+1}du \\
&= u - \text{arctg}(u) + K = \sqrt{x-1} - \text{arctg}(\sqrt{x-1}) + K.
\end{aligned}$$

Temos que $F(2) = \frac{\pi}{2} + 1$, logo $\sqrt{2-1} - \text{arctg}(\sqrt{2-1}) + K = \frac{\pi}{2} + 1$. Como $\text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, temos $K = \frac{3\pi}{4}$. Assim, $F(x) = \sqrt{x-1} - \text{arctg}(\sqrt{x-1}) + \frac{3\pi}{4}$. Derivando, temos:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{[\sqrt{x-1}]^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + 0 = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{\sqrt{x-1}}{2x} = f(x). \end{aligned}$$

Como queríamos!

Q. 3 (1,5)***.*** Para cada item abaixo, julgue em verdadeiro ou falso, justificando sua resposta.

(a) Determinar as primitivas de uma função f, se resume em achar uma primitiva particular de f;

(b) $\int f(x) \cdot g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$;

(c) Se F e G são duas primitivas de f no intervalo I, então existe constante C tal que $F(x) - G(x) = C$, para todo $x \in I$;

(a) Verdadeiro. Pois, se $F(x)$ e $G(x)$ são duas primitivas de $f(x)$, num dado intervalo, então $F'(x) = f(x) = G'(x)$. Deste modo, dizemos que F e G são iguais, a menos de uma constante, ou seja, $F(x) = G(x) + K$, $K \in \mathbb{R}$. Assim, podemos dizer que, ao obter uma primitiva para $f(x)$, estamos obtendo uma representante para uma família de funções, cuja a derivada de cada uma é igual a função $f(x)$, neste dado intervalo.

(b) Falso. Tomemos, como contra exemplo, $f(x) = 2$ e $g(x) = x$. Assim, se fosse verdadeiro teríamos:

$$x^2 + K = \int 2x dx = \int 2dx \cdot \int x dx = (2x + K_1) \cdot \left(\frac{x^2}{2} + K_2\right) = x^3 + \ldots,$$

que, visivelmente, é um absurdo.

(c) Verdadeiro. Sendo F e G duas primitivas de f, no intervalo I, temos que $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Assim, sempre existe constante real em que $F(x) - G(x)$ resulta nesta constante, pelo fato que a derivada da constante é zero.