UNIFACS - Cursos de Engenharia
Disciplina: **Cálculo Integral**
Ano: 2013

4ª Lista de Exercícios – 2013.2

1) Determine o domínio das funções abaixo e represente graficamente:

a) $f(x,y)=\sqrt{y^2-x}$. b) $f(x,y)=\sqrt{y^2-4}.\ln(x-y)$. c) $f(x,y)=\sqrt{y-x}-\sqrt{1-x}$

d) $f(x,y)=\ln\left[\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\right]$. e) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{y-x^2}$

2) Para esboçar o gráfico das funções abaixo determine o domínio; determine e trace as interseções da superfície com os planos coordenados; determine e trace as curvas de nível;

a) $f(x,y)=16-x^2-y^2$. b) $f(x,y)=9x^2+4y^2$. c) $f(x,y)=x^2$.

d) $f(x,y)=8-2x-4y$. e) $f(x,y)=1-y^2$

3) Se $T(x,y)$ for a temperatura em um ponto (x,y) sobre uma placa lisa de metal no plano *XOY*, então as curvas de nível de *T* são chamadas de ***curvas isotérmicas.*** Todos os pontos sobre tal curva têm a mesma temperatura. Suponha que uma placa ocupa o *1º* quadrante e $T(x,y)=xy$.

a) Esboce as curvas isotérmicas sobre as quais T = 1 e T = 2.

b) Uma formiga, inicialmente sobre o ponto (1, 4), anda sobre a placa de modo que a temperatura ao longo de sua trajetória permanece constante. Qual é a trajetória tomada pela formiga e qual é a temperatura ao longo de sua trajetória?

4) Se *V*(*x,y*) for a voltagem ou potencial sobre um ponto (*x,y*) no plano *XOY*, então as curvas de nível de *V* são chamadas de ***curvas equipotenciais.*** Ao longo de tal curva a voltagem permanece constante. Dado que $V(x,y)=\dfrac{8}{\sqrt{16+x^2+y^2}}$, identifique a curva equipotencial na qual *V = 1*.

5) Para as funções abaixo, calcule as derivadas parciais no ponto P_o indicado.

a) $f(x,y)=e^x\ln(xy)$; $P_o(1,2)$. b) $f(x,y)=x\cos[(x/y)+\pi]$; $P_o(0,1)$.

c) $f(x,y)=y^2\ln(x^2+y^2)$; $P_o(0,1)$. d) $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$; $P_o(1,1)$.

e) $f(x,y)=\text{arctg}(y/x)$; $P_o(2,2)$. f) $f(x,y)=e^x\ln(x+y)$; $P_o(1,2)$.

g) $g(x,y,z)=\sqrt{x}+\text{sen}^2(y).\text{tg}(z)$; $P_o(4,\pi/4,\pi/4)$. h) $g(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)/(xyz)$; $P_o(1,1,1)$.

6) Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. ***Verifique*** se a equação $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ é verdadeira $\forall(x,y) \neq (0,0)$.

7) Determine o coeficiente angular da reta tangente no ponto (–1,1,5) à curva obtida pela interseção da superfície $z = x^2 + 4y^2$ com plano: a) x = –1; b) y = 1.

8) A área *A* da superfície lateral de um cone circular reto de altura *h* e raio da base *r* é dada por. $A = \pi . r\sqrt{h^2 + r^2}$.

a) Se *r* é mantido fixo em *3 cm*, enquanto *h* varia, encontre a taxa de variação de *A* em relação a *h*, no instante em que *h = 7cm*.

b) Se *h* é mantido fixo em *7cm*, enquanto *r* varia, encontre a taxa de variação de *A* em relação a *r*, no instante em que *r = 3cm*.

9) Um ponto move-se ao longo da interseção do parabolóide elíptico $z = x^2 + 3y^2$ e do plano x = 2. A que taxa está variando *z* em relação a y quando o ponto está em (2,1,7).

10) Uma placa de metal aquecida está situada em um plano XOY de modo que a temperatura T no ponto (x,y) é dada por $T(x,y) = 10(x^2 + y^2)^2$. Determine a taxa de variação de T em relação à distância percorrida ao longo da placa a partir do ponto (1,2), nas direções positivas de:

a) OX. b) OY.

11) Verifique se as derivadas parciais de segunda ordem mistas (f_{xy} e f_{yx}) são iguais.

a) $f(x,y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7xy - 3$. b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

12) ***Mostre*** que a função $u(x,t) = \text{sen}(x - Ct)$ é uma solução da ***equação da onda*** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

13) ***Verifique*** se as funções abaixo satisfazem a ***equação de Laplace*** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ para todo *x* e *y*.

a) $z = x^3 + x^2 + y^2$. b) $z = e^x \text{sen}(y) + e^y \cos(x)$.

14) Mostre que a função $z = e^{-t}\text{sen}\left(\dfrac{x}{C}\right)$, *C* constante, satisfaz a ***equação do calor*** $\dfrac{\partial z}{\partial t} = C^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

15) Usando a regra da cadeia encontre as derivadas parciais das seguintes funções:

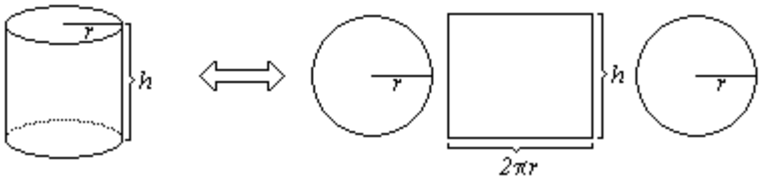
a) $z = 4x^3 - 3x^2y^2$; $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = v\,\text{sen}\,u \end{cases}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ b) $z = \ln(u^2 + v^2)$; $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = 2x^2 + 3xy \end{cases}$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

16) Determine a derivada total em cada caso

a) $z = \dfrac{x}{y}; \begin{cases} x = e^{t} \\ y = \ln t \end{cases};$ b) $z = u^{v}; \begin{cases} u = \operatorname{sen} x \\ v = \cos x \end{cases}$

17) O raio r e a altura h de um cilindro circular reto aumentam à razão de *2 cm/min* e *6 cm/min*, respectivamente. Num determinado instante sabe-se que $r = 8cm$ e $h = 14cm$. A que taxa a área da *superfície total* está variando neste instante?

<u>Obs.:</u> A área da *superfície total* do cilindro é $S(r,h) = 2\pi r^{2} + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$.



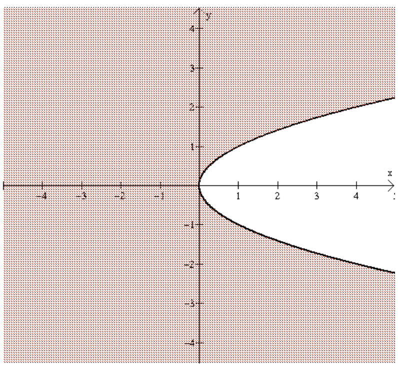
18) O comprimento ***l***, a largura ***w*** e a altura ***h*** de uma caixa variam com o tempo. As arestas ***l*** e ***w*** estão *aumentando* a uma taxa de *0,2m/s*, ao passo que ***h*** está *diminuindo* a uma taxa de *0,3m/s.* Num certo instante as dimensões da caixa são ***l*** = *1m*, ***w*** = *2m* e ***h*** = *2m*. Neste instante, como está variando o volume da caixa?

19) A altura de um cone circular reto é 10cm e está aumentando a uma taxa de 2cm/s. O raio da base é 15cm e está diminuindo de 1cm/s. a que taxa está variando o volume em relação ao tempo, nesse instante. (O volume do cone é um terço da área da base vezes a altura).

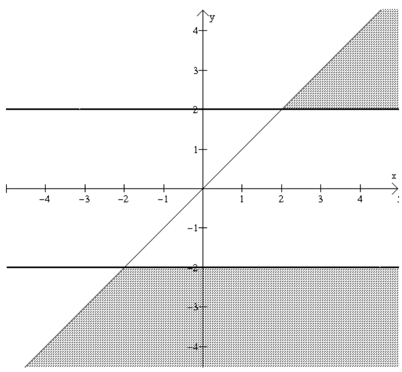
20) Um circuito elétrico simples consiste em um resistor *R* e uma força eletromotriz *V*. Em certo instante, a força eletromotriz é *100v* e aumenta à taxa de *3 volts/min*, enquanto a resistência é de *50 ohms* e *decresce* à razão de *2 ohms/min*. A que taxa varia a corrente *I* (em amperes) nesse instante, sabendo que, pela lei de Ohm, $V = RI$?

<u>Respostas:</u>

1a)

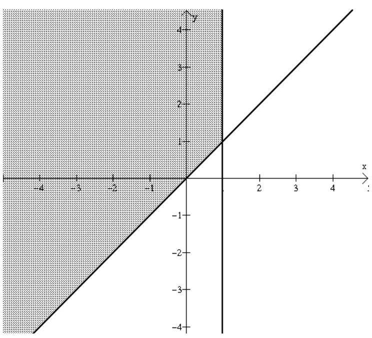


1 b)

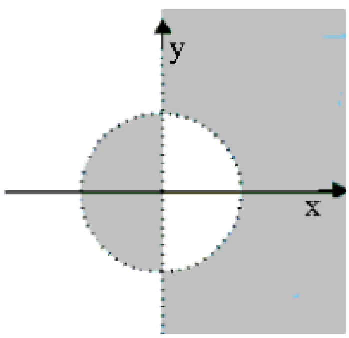


A reta y = x não pertence à região

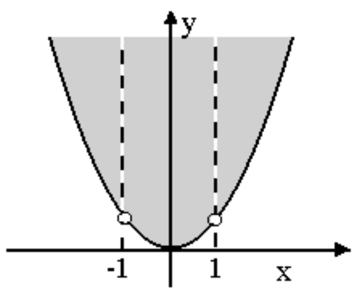
1c)



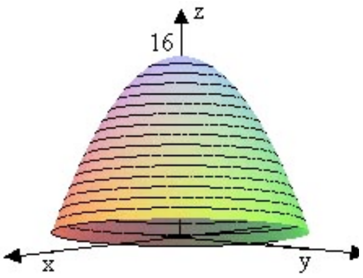
1d)



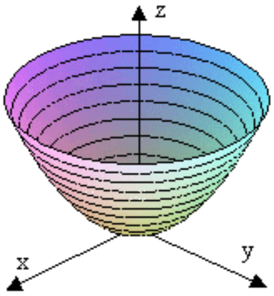
1e)



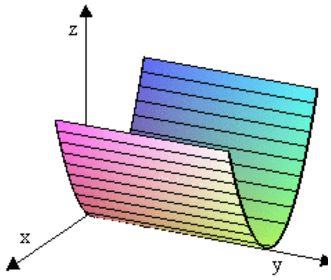
2a)



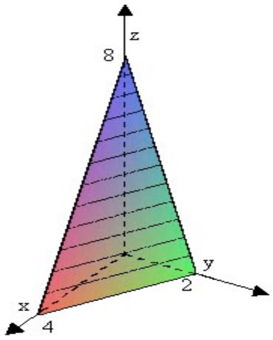
2b)



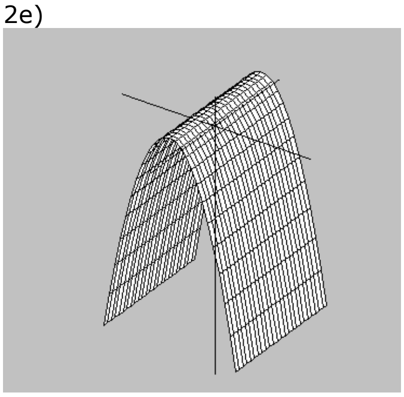
2c)



2d)

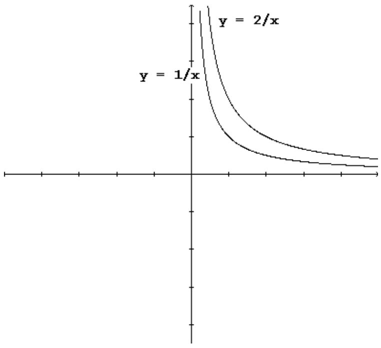


2e)



3)

a)



) O caminho é xy = 4 e a temperatura T = 4

4) A curva é $x^2 + y^2 = 48$ (circunferência).

5) a) $f_x(P_o) = e[\ln(2) + 1]$; $f_y(P_o) = e/2$; b) $f_x(P_o) = -1$; $f_y(P_o) = 0$;
c) $f_x(P_o) = 0$; $f_y(P_o) = 2$; d) $f_x(P_o) = 1$; $f_y(P_o) = -1$;
e) $f_x(P_o) = -1/4$; $f_y(P_o) = 1/4$; f) $f_x(P_o) = e\ln 3 + e/3$; $f_y(P_o) = e/3$;
g) $g_x(P_o) = 1/4$; $g_y(P_o) = 1$; $g_z(P_o) = 1$; h) $g_x(P_o) = -1$; $g_y(P_o) = -1$; $g_z(P_o) = -1$

6) sim. 7) a) 8; b) –2. 8) a) $\frac{21\pi}{\sqrt{58}}$. b) $\frac{67\pi}{\sqrt{58}}$. 9) 6 10) a) 200; b) 400

11) a) $f_{xy} = f_{yx} = -32y^3 + 7$; b) $f_{xy} = f_{yx} = -xy\left(x^2 + y^2\right)^{-3/2}$; 13) a) não; b)sim

15) a) $\frac{\partial z}{\partial u} = (12x^2 - 6xy^2)\cos v - 6x^2 yv\cos u$; $\frac{\partial z}{\partial v} = (12x^2 - 6xy^2)(-u\,\text{sen}\,v) - 6x^2 y\,\text{sen}\,u$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v^2}2x + \frac{2v}{u^2 + v^2}(4x + 3y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v^2}2y + \frac{2v}{u^2 + v^2}3x$

16) a) $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t}{\ln t} - \frac{e^t}{t\ln^2 t}$; b) $\frac{dz}{dx} = \cos^2 x(\text{sen}\,x)^{\cos x - 1} - (\text{sen}\,x)^{\cos x}\ln(\text{sen}\,x)\,\text{sen}\,x$

17) 216π cm^2/min. 18) 0,6 m^3/s; 19) 50πcm^3/s 20) 0,14 A/min .