

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

(CÁLCULO INTEGRAL)

Adriano Pedreira Cattai

<http://cattai.mat.br/unifacs>

Universidade Salvador — UNIFACS

2010.2

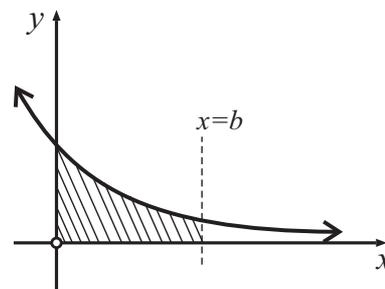
1 Introdução

No Teorema Fundamental do Cálculo (**TFC**), os limites de integração, a e b em $\int_a^b f(x)dx$, são números reais e f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Pode acontecer que, ao aplicarmos estes conceitos, seja preciso ou conveniente considerar os casos em que $a = -\infty$, $b = +\infty$, ou f seja descontínua em um ou mais pontos do intervalo. Nestas condições, é preciso ampliar o conceito de integral e as técnicas de integração, de modo a incluir estes casos adicionais. Estas integrais, em que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ ou f é descontínua em $[a, b]$, são chamadas *Integrais Impróprias*. Nem sempre uma integral deste tipo representa um número real, isto é, nem sempre uma integral imprópria existe. Quando ela existe, seu valor é calculado levando-se em conta a generalização do conceito de integral definida.

2 Integrais Impróprias com Extremos de Integração Infinitos

Exemplo 2.1. Consideremos o problema de encontrar área da região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelo eixo- y e pela reta $x = b > 0$ como mostra a figura ao lado. Se A unidades de área for a área da região, então

$$A = \int_0^b e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^b = 1 - e^{-b} = 1 - \frac{1}{e^b}$$



Se deixarmos b crescer sem limitações, então

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^b}\right) = 1. \quad (1)$$

De (1) segue que, não importa quão grande seja o valor de b , a área da região será sempre menor do que 1 unidade de área.

A equação (1) estabelece que se $b > 0$, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que

$$\text{se } b > N \text{ então } \left| \int_0^b e^{-x} dx - 1 \right| < \varepsilon.$$

Em lugar de (1) escrevemos $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. Em geral temos as seguintes definições:

Definição 2.2 (Integrais Impróprias).

(i) Se f for contínua para todo $x \geq a$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

se esse limite existir.

(ii) Se f for contínua para todo $x \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

se esse limite existir.

(iii) Se f for contínua para todos os valores de x e c for um número real qualquer, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

se esses limites existirem.

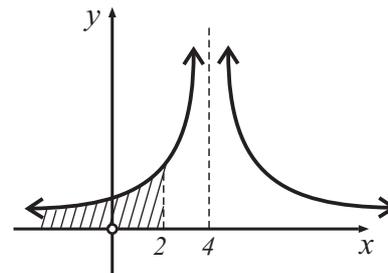
Pode-se mostrar, que se o limite existir, o segundo membro da equação no item (iii) da definição acima, independe da escolha de c . É comum tomar $c = 0$.

Na definição acima, se o limite existir, diremos que a integral imprópria é *convergente*, caso contrário, diremos que é *divergente*.

Exemplo 2.3. Calcule a integral, se ela convergir: $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$.

Solução:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4-x} \Big|_a^2 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a} \right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$



Exemplo 2.4. Estude a convergência da integral: $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.

Solução: $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b xe^{-x} dx$.

Para calcular essa integral, usaremos integração por partes com $u = x$, $dv = e^{-x} dx$, $du = dx$ e $v = -e^{-x}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-xe^{-x} - e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-be^{-b} - e^{-b} + 1) \\ &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b}{e^b} - 0 + 1.\end{aligned}$$

Como $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b}{e^b}$ é uma forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando a regra de L'Hospital temos que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b}{e^b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^b} = 0$$

e portanto,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -0 - 0 + 1 = 1.$$

Questão 1. Estude a convergência das integrais a seguir

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x} dx$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$

(e) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x} dx$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

(f) $\int_1^{+\infty} x^n dx$

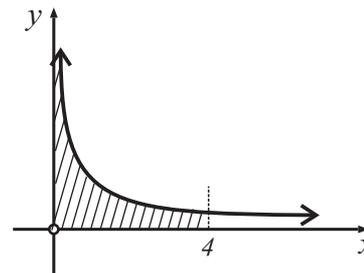
3 Outras Integrais Impróprias

Exemplo 3.1. Suponha que queremos obter a área da região do plano limitada pela curva cuja equação é $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, pelo eixo- x , pelo eixo- y e pela reta $x = 4$. Conforme ilustra a figura abaixo.

Se for possível ter um número que represente a medida da área dessa região, ele será obtido pela integral

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Entretanto, o integrando é descontínuo no extremo inferior zero. Além disso, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, assim dizemos que o integrando tem uma descontinuidade infinita no extremo inferior.



Essa integral é imprópria e sua existência pode ser determinada da seguinte forma:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{x} \Big|_t^4 \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (4 - 2\sqrt{t}) = 4,$$

logo 4 será a medida da área da região dada.

Mais geralmente temos as seguintes definições:

Definição 3.2.

(iv) Se f for contínua para todos os x do intervalo semi-aberto à esquerda $(a, b]$, e se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

se esse limite existir.

(v) Se f for contínua para todos os x do intervalo semi-aberto à direita $[a, b)$, e se $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

se esse limite existir.

(vi) Se f for contínua para todos os valores de x no intervalo $[a, b]$ exceto c , onde $a < c < b$ e se $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{s \rightarrow c^+} \int_s^b f(x) dx$$

se esses limites existirem.

Exemplo 3.3. Calcule a integral, se ela for convergente: $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Solução: O integrando tem uma descontinuidade infinita em 1, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{dx}{(x-1)^2} = +\infty$.

Portanto, pela definição que acabamos de estabelecer, temos

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x-1} \Big|_0^t \right) + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x-1} \Big|_s^2 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{t-1} - 1 \right) + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{s-1} - 1 \right)\end{aligned}$$

Como nenhum desses limites existe, a integral imprópria é divergente.

Observação 3.4. Se no exemplo anterior não estivéssemos notado a descontinuidade do integrando em 1, teríamos

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} \Big|_0^2 = -\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} = -2.$$

Esse resultado é obviamente incorreto, um vez que $\frac{1}{(x-1)^2}$ nunca é negativo, e então a integral de 0 a 2 nunca poderia ser um número negativo.

Exemplo 3.5. Calcule a integral, se ela convergir: $\int_0^1 x \cdot \ln(x) dx$.

Solução: O integrando tem uma descontinuidade no extremo inferior. Portanto, escrevemos

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \cdot \ln(x) dx.$$

Para calcular essa integral, usaremos integração por partes com $u = \ln(x)$, $dv = x dx$, $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot \ln(x) dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \cdot \ln(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} x \Big|_t^1 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} t^2 \cdot \ln(t) + \frac{1}{4} t^2 \right) \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \cdot \ln(t)\end{aligned}$$

Note que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \cdot \ln(t)$ é uma indeterminação do tipo $0 \times (-\infty)$. Para calcular esse limite, escrevemos

$$t^2 \cdot \ln(t) = \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t^2}},$$

e portanto, aplicando a regra de L'Hospital temos,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \cdot \ln(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{t^2}{2} \right) = 0.$$

Logo,

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x) dx = -\frac{1}{4}.$$

Texto composto em $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, APC, 2010.2