Aplicações da Integral Definida

1 Área limitada por gráficos de funções em coordenadas cartesianas

Anteriormente, mencionamos que se uma função f é contínua no intervalo $[a,b]$ e ainda $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$, então a área da região R do plano limitada pelo gráfico de f, o eixo-x e pelas restas x=a e x=b é a integral definida de f de a até b, ou seja,

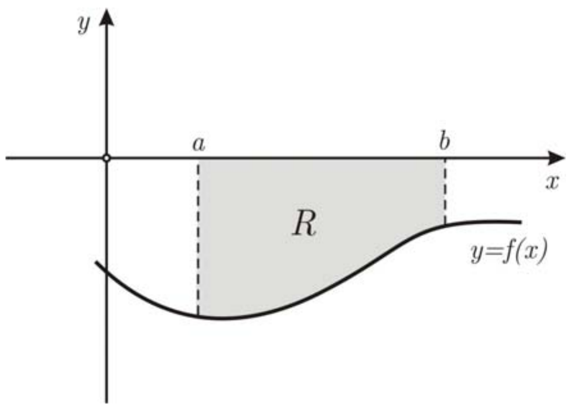
$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Veremos como o uso de integrais definidas pode ser empregado para o cálculo da área de algumas regiões planas limitadas por gráficos de funções dadas em coordenadas cartesianas, $y = f(x)$ ou $x = g(y)$.

> Devemos ter cuidado, pois, se não levarmos em conta a extensão, poderemos ser levados a uma resposta incorreta ou a um número negativo para a medida de uma área, o que evidentemente não tem sentido. Lembre-se que a integral definida não é necessariamente uma área. Dependendo do problema, ela pode representar grandezas como volume, lucro a ser obtido, quantidade de bactérias presentes em certo instante, etc.

Observações:

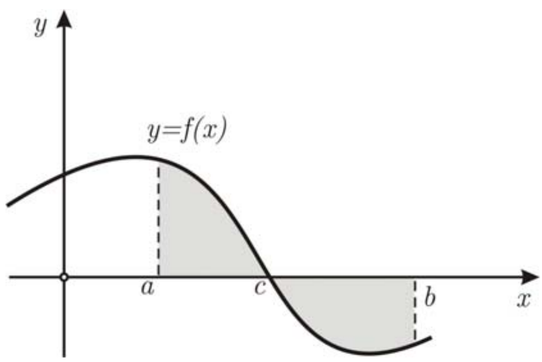
1. Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e, além disso, $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então a área da região limitada pelo gráfico, pelo eixo-x e pelas retas x=a e x=b é dada pela integral:



$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$$

Exemplo: $f(x) = x^2 - 4x$

2. Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e seu gráfico está acima e também abaixo do eixo-x, no intervalo $[a,b]$, então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$, e daí a área da região limitada



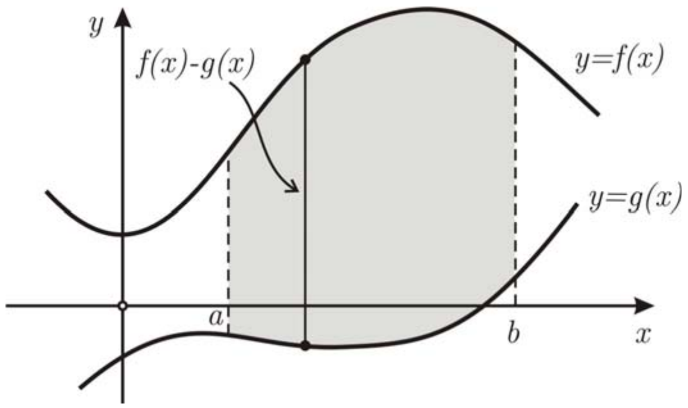
pelo gráfico de f, pelo eixo-x e pelas retas x=a e x=b é dada da seguinte forma:

$$\int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

Exemplo: $f\left(x\right) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1.1 Área entre duas curvas

Considere duas funções f e g tais que o gráfico de f esteja sempre acima do gráfico da g para valores de x entre a e b. Uma região Rx é uma região que está compreendida entre os gráficos das duas equações da forma $y = f(x)$ e $y = g(x)$, conforme figura abaixo.



Observe que, para qualquer x, o número $f(x) - g(x)$ é a distância vertical entre os gráficos de f e g. Dessa forma a área da região R_x é dada pela integral:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx\,.$$

Diretrizes para achar a área de uma região Rx

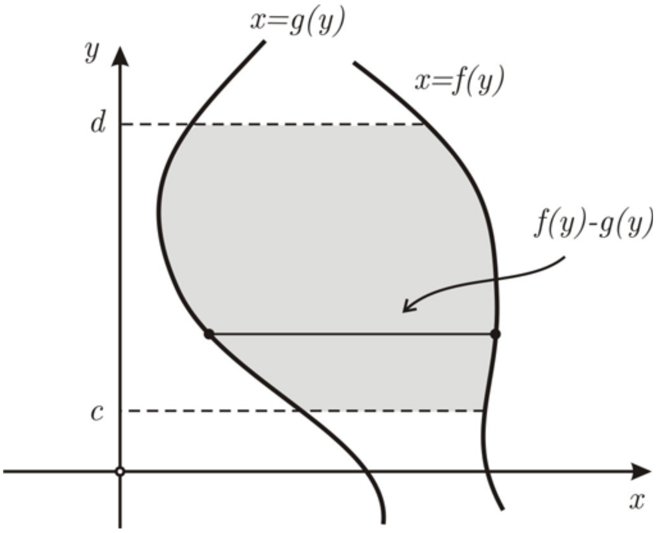
1. Esboçar a região, designada por $y = f(x)$, por $y = g(x)$ e as fronteiras direita e esquerda de R_x;
2. Determinar o menor valor $x = a$ e o maior valor $x = b$ entre os pontos (x, y) da região R_x;
3. Desenhar um retângulo horizontal típico, designando a sua largura por dx;
4. Expresse a área do retângulo na diretriz 3 como $[f(x) - g(x)]dx$;
5. Aplique o operador linear de soma $\int_a^b$ á expressão da diretriz 4, e calcule a integral.

Exemplos: Obter a área entre as curvas (**a**) $y = 2x^2$ e $y = 3x$; (**b**) $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$; (**c**) $y = \frac{1}{x^2}$ e $14x + 9y = 43$; (**d**) $y = x^2$ e $y = x+2$; (**e**) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2 - 9$ (**f**) $y=x^2$ e $y=-x^2 + 4x$

1.2 O caso em que a função é da forma $x = f(y)$

Considerando a equação da forma $x = f(y)$, contínua em [c, d], estaremos na verdade invertendo os papéis de x e y, admitindo y como a variável de integração. Ou seja, y como variável independente e x a variável dependente.

Uma região R_y é uma região que está compreendida entre os gráficos de duas equações da forma $x = f(y)$ e $x = g(y)$, com f e g contínuas e $f(y) > g(y)$ para todo y *em* $[c, d]$, onde c e d são respectivamente a menor e a maior coordenada y dos pontos da região. A figura ao lado ilustra tal região.



Observe que, para qualquer y, o número $f(y) - g(y)$ é a distância horizontal entre os gráficos de f e g. Dessa forma a área da região R_y é dada pela integral:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

Diretrizes para achar a área de uma região Ry

1. Esboçar a região, designada por $x = f(y)$, por $x = g(y)$ e as fronteiras direita e esquerda de R_y;
2. Determinar o menor valor $y = c$ e o maior valor $y = d$ entre os pontos (x, y) da região R_y;
3. Desenhar um retângulo horizontal típico, designando a sua largura por dy;
4. Expresse a área do retângulo na diretriz 3 como $[f(y) - g(y)]dy$;
5. Aplique o operador linear de soma $\int_c^d$ á expressão da diretriz 4, e calcule a integral.

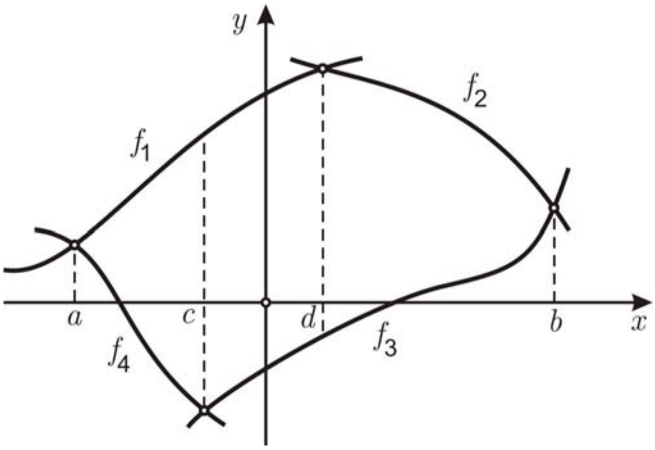
Exemplos: Ache a área da região delimitada pelos gráficos das equações indicadas em cada caso abaixo.

(**a**) $2y^2 = x + 4$ e $y^2 = x$; (**b**) $x = -3y^2 + 4$ e $x = y^3$; (**c**) $x = 1$; $y = \sqrt{x}$ para $y>0$ e $x + y = 6$; $x - y = 2$;

(**d**) $y = 8$ e $y = \pm\sqrt{x^3}$; (**e**) $2x + y = -2$; $x - y = -1$ e $7x - y = 17$. (f) $y=x^3-6x^2+8x$ e $y=x^2-4x$

1.3 Área da região limitada por mais de duas curvas

Considere a seguinte situação ilustrada na figura abaixo.



Neste caso, em que a região é limitada por mais de duas funções, podemos obter a área da região fazendo decomposições em áreas limitadas por duas funções e retas paralelas ao eixo-x, (ou eixo-y) da seguinte forma:

$$\int_a^c \left[f_1(x) - f_4(x) \right] dx + \int_c^d \left[f_1(x) - f_3(x) \right] dx + \int_d^b \left[f_2(x) - f_3(x) \right] dx$$

Exemplo: Obter a área da região limitada pelas curvas $xy = 1$, $y = 4x$ e $4y = x$.

Texto composto em Microsoft Office Word, APC, 2010