A Integral Definida

www.cattai.mat.br/blog

Integral Definida ou de Riemann

1 Notação Sigma

A definição da integral definida utiliza a soma de muitos termos. Assim, para expressar tais somas, introduzimos a notação grega, cujo símbolo é $\sum$ que corresponde à letra S para significar "*a soma de todos os termos*".

Por exemplo, em vez de escrever 1+2+3+4+5+6 podemos escrever $\sum_{i=1}^{6} i$. Tomando a convenção de que i assume valores de 1 até 6. Ou seja

$$\sum_{i=1}^{6} i = 1+2+3+4+5+6$$

soma dos seis primeiros números inteiros positivos.

Exemplo 1: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+2+3+...+n$ (soma dos n primeiros números naturais ímpares).

Em geral, $\sum_{i=n}^{k} P(i) = P(n)+P(n+1)+...+P(k)$, onde k e n são números inteiros com $n \le k$.

Obs. O número n é chamado de *limite inferior* da soma e, k o *limite superior* da soma. O i é denominado índice da soma.

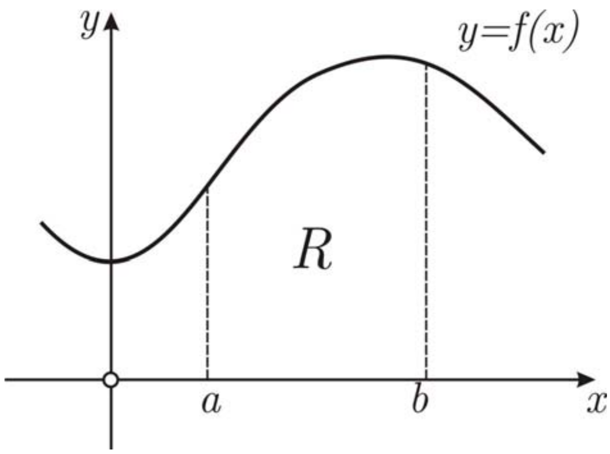
2 Área da Região Limitada sob o Gráfico de uma Função

Geometricamente, os fundamentais problemas do **cálculo** são o de encontrar a inclinação da **tangente** à uma curva e, a determinação da **área** de uma região limitada por curvas. A derivada está relacionada com a **tangente** e a integral definida com o cálculo de **áreas** de certas regiões do plano cartesiana.

Sabemos que, a área de uma região limitada por retas é facilmente calculável empregando as fórmulas conhecidas. Por exemplo, a área de um retângulo é o produto do seu comprimento pela sua altura. A área de triângulo é o produto de uma base pela metade da altura correspondente. A área de um polígono pode ser obtida decompondo-o em triângulo.

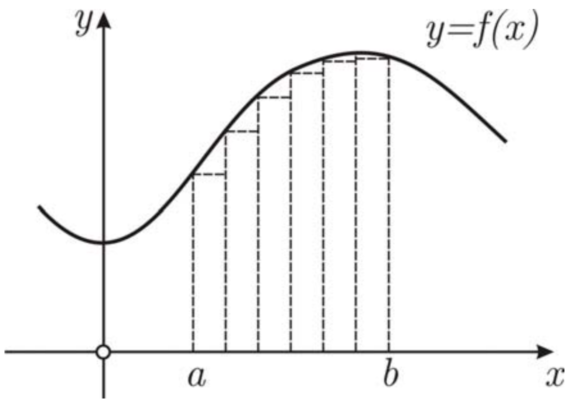
No cálculo de área de regiões delimitadas por gráficos de funções utilizamos a teoria de limite e métodos de cálculos algébricos.

Para essa finalidade, consideramos uma região **R** em um plano coordenado, delimitada por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo gráfico de uma função *f* contínua e não negativa no intervalo fechado [*a, b*], conforme a figura abaixo.

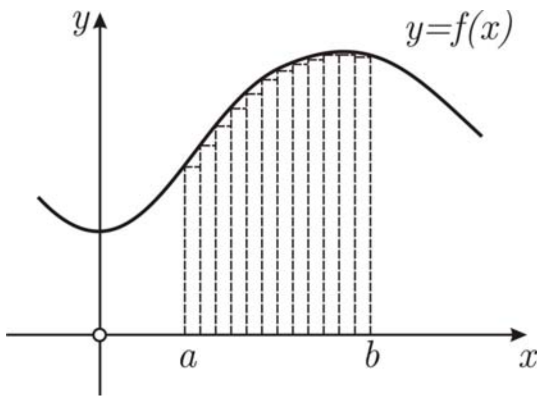


Como $f(x) \geq 0$ para todo *x* em [*a, b*], o gráfico de *f* não tem parte alguma abaixo do eixo-*x*. Por conveniência tomamos a *região R sob o gráfico de f de a* a *b*. E consideramos um número ***A*** como a área da região R.

Queremos definir a área ***A*** da região ***R***. Para chegarmos a esta definição, dividimos a região ***R*** em muitos retângulos de igual largura tal que cada retângulo esteja completamente inscrito no gráfico de ***f***, e intercepte o gráfico em pelo menos um ponto, conforme ilustrtação abaixo.



6 retângulos inscritos



12 retângulos inscritos

A fronteira formada pela totalidade desses retângulos é chamado de ***polígono retangular inscrito.*** Usaremos a notação AP_i para representar a área desse polígono.

Se a largura dos retângulos na figura a cima é pequeno então parece que $AP_i \approx \boldsymbol{A}$.

Essa idéia sugere fazermos a **largura dos retângulos tender para zero** e definir ***A*** como o **limite da soma das áreas** AP_i dos polígonos retângulos inscritos.

Assim, se n é um inteiro positivo arbitrário, dividimos o intervalo [a, b] em n subintervalos do mesmo comprimento $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, tomando $a = x_0$ e $b = x_n$ e $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ no conjunto $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de elementos de [a, b], com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Note que $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, $x_3 = a + 3\Delta x$, ... , $x_i = a + i\Delta x$, ... , $x_n = a + n\Delta x = b$,

Seja $[x_{i-1}, x_i]$ o i-ésimo subintervalo de [a, b]. Como f é contínua em [a, b], então ela o é também em $[x_{i-1}, x_i]$. Daí, pelo teorema do valor extremo, existe um número c_i em cada subintervalo para o qual f toma um valor mínimo–absoluto.

Assim, para cada i construímos um retângulo de largura $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$. Daí, a área do i-ésimo retângulo é $f(c_i)\Delta x$ e a área AP_i do polígono retangular inscrito é a soma das área dos n retângulos. Isto é,

$$AP_i = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \ldots + f(c_n)\Delta x$$

ou seja

$$AP_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x .$$

Onde $f(c_i)$ é o valor numérico de f em $[x_{i-1}, x_i]$.

Se n é **muito grande** ou equivalentemente Δx **é pequeno**, então a soma AP_i deve aproximar-se da área da região R.

Assim, temos a seguinte definição.

Definição (Área): Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$ e que a região R é limitada pela curva $y = f(x)$, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo-x. Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $[x_{i-1}, x_i]$ o i-ésimo subintervalo. Então, se $f(c_i)$ for o valor mínimo absoluto da função em $[x_{i-1}, x_i]$, a medida da *área* A da região R é dada por

$$A = \lim_{n\to\infty} AP_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x .$$

A equação acima significa que, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x - A \right| < \varepsilon$

Sempre que $n > \delta$ onde $n \in \mathrm{N}$.

3 A Integral Definida

A área sob o gráfico de uma função f no intervalo [a, b] como vimos acima é o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x .$$

Restringiremos f e Δx como segue:

1.a) f contínua no intervalo fechado [a, b];

2.a) $f(x)$ é não-negativa para todo x em [a, b];

3.a) Todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ têm o mesmo comprimento Δx;

4.a) número c_i é escolhido de modo que $f(c_i)$ seja o mínimo (ou máximo) de *fi em* $[x_{i-1}, x_i]$.

Entretanto, há muitas aplicações que envolvem este tipo de limite, em que, nem todas as condições acima são satisfeitas. Assim, é conveniente considerar as seguintes alterações:

1.b) A função f pode ser descontínua em algum ponto do intervalo [a, b];

2.b) f pode assumir valores negativos em algum ponto em [a, b;]

3.b) Os comprimentos dos subintervalos podem ser diferentes;

4.b) O número c_i pode ser qualquer em $[x_{i-1}, x_i]$.

Atenção: Note que, se 2.b) ocorrer o limite não é mais a área sob o gráfico de *f*.

Consideramos, portanto uma nova termologia e notação onde o $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ é um caso especial.

Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Dividindo esse intervalo em n subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, não necessariamente de mesmo comprimento, onde n é um inteiro positivo, e $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b$.

O Conjunto **P** de todos esses subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ com $1 \leq i \leq n$ é chamado uma **Partição** do intervalo fechado $[a, b]$. Onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ denota o comprimento de i-ésimo subintervalo.

O comprimento do maior subintervalo da partição **P** é chamado a **norma** da partição e, é denotado por $\|P\|$. Escolhemos um ponto em cada subintervalo da partição **P.** Seja z_1 o ponto escolhido em $[x_0, x_1]$, tal que $x_0 \leq z_1 \leq x_1$ e, z_2 o ponto escolhido em $[x_1, x_2]$, tal que $x_1 \leq z_2 \leq x_2$ e, assim sucessivamente de modo que z_i o ponto escolhido em $[x_{i-1}, x_i]$ de tal sorte que $x_{i-1} \leq z_i \leq x_i$. Formamos a soma

$$f(z_1)\cdot \Delta x_1 + f(z_2)\cdot \Delta x_2 + \cdots + f(z_i)\cdot \Delta x_i + \cdots + f(z_n)\cdot \Delta x_n$$

ou

$$R_P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i, \quad \text{onde } z_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Esta soma é denominada **Soma de Riemann**.

No somatório acima $f(z_i)$ não é necessariamente um máximo ou mínimo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Além disso, R_P nem sempre representa uma soma de áreas de retângulos.

A discussão acima se resume na seguinte definição de uma função integrável num dado intervalo fechado $[a, b]$.

Definição (Integral Definida): Seja f uma função definida em um intervalo fechado [a, b].

A *integral definida* de f desde a a b denotada por $\int_a^b f(x)dx$ é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

Desde que o limite existe. Se o limite existe, diremos que f é integrável em [a, b].

O processo de determinar o limite na definição anterior é chamado *cálculo da integral definida*. Note que o valor de uma integral definida é um número, e não uma família de antiderivadas como ocorria com a integral indefinida.

Na notação $\int_a^b f(x)dx$ os números a e b são os limites de integração; onde a é o limite inferior e b é o limite superior, $f(x)$ é chamado integrando, e o símbolo dx que sucede $f(x)$ está associado ao incremento de Δx_i.

Observação. Na definição da função integrável acima, dizer que $\|P\| \to 0$ é equivalente a dizer que $n \to \infty$. Assim, de um modo geral temos:

Definição: Se f é uma função contínua em [a, b] e $f(x) \geq 0$ para todo x em [a, b], R é a região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo-x e as retas $x = a$ e $x = b$ então, a medida da área da região R e dada por $A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$.

4 O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

O **TFC** foi estabelecido independentemente por **Sir Isaac NEWTON** (1642-1727) na Inglaterra e por **Gottfried Wilhelm LEIBNIZ** (1646-1716) na Alemanha.

É por esta razão que estes dois grandes matemáticos têm o mérito de terem descoberto o cálculo.

Teorema (TFC): Seja f uma função contínua em [*a*, *b*].

(**i**) Se a função G é definida por $G(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a,b]$, então G é uma antiderivada de *f* em [*a*, *b*].

(**ii**) Se F é uma antiderivada de f em [a, b], então $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Notação: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

Exemplo 6: Encontre o valor exato da integral definida $\int_0^3 x^2dx$. Interpretando geometricamente o resultado obtido.

Exemplo 7: Idem para as integrais definidas abaixo:

$a)\int_{-1}^{5}6dx$ $\quad b)\int_{-2}^{3}4dx$ $\quad d)\int_{-3}^{2}(2x+6)dx$ $\quad e)\int_{0}^{3}|x-1|dx$ $\quad f)\int_{-1}^{4}|x|dx$

4.1 Uma Conseqüência do TFC

Uma conseqüência mais teórica das duas versões do TFC é a derivabilidade de certas funções definidas por integrais. Vejamos um exemplo como ilustração.

Seja a função $f(x)=\cos x$, e como ela é contínua em $\mathbb{R}$, temos que dado um número real x, f é contínua no intervalo $[0,x^2]$ e, portanto, podemos associar o número $\int_0^{x^2}\cos t dt$. Estamos assim falando de uma função h definida pela expressão $h(x)=\int_0^{x^2}\cos t dt$.

Como $\sin t$ é uma primitiva para $\cos t$, e do TFC, segue que:

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^{x^2}\cos t dt = \sin t\Big|_0^{x^2} \\ &= \sin\left(x^2\right)-\sin(0)=\sin\left(x^2\right) \end{aligned}$$

e portanto, h é derivável com $h'(x)=2x\cos\left(x^2\right)$.

Se $G(x)$ é uma primitiva da função $f(x)=\cos(x)$, então

$$h(x)=\int_0^{x^2}\cos t dt = G(t)\Big|_0^{x^2} = G\left(x^2\right)-G(0),$$

e portanto, $h'(x)=G'\left(x^2\right)\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right)=2xG'\left(x^2\right)$. Observe que $G(0)$ não contribui com nada para a derivada, pois é uma constante.

Como $G(x)$ é uma primitiva para $f(x)=\cos(x)$, então $G'(x)=\cos(x)$, e daí $h'(x)=2x\cos\left(x^2\right)$.

Em geral, se f uma função contínua num intervalo I, e $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ pertencem ao intervalo I, podemos definir a função $h(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$.

O teorema a seguir ensina como derivar $h(x)$.

Teorema: Se f é contínua e α e β são deriváveis, então $h(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ é derivável e

$$h'(x)=f\left(\beta(x)\right)\cdot\beta'(x)-f\left(\alpha(x)\right)\cdot\alpha'(x)$$

5 Propriedades da Integral Definida

Obs. Para o cálculo do limite na definição anterior para a *integral definida* podemos restringir nossas partições ao caso em que todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ têm o mesmo comprimento Δx. Uma partição deste tipo é dito ***Partição Regular***.

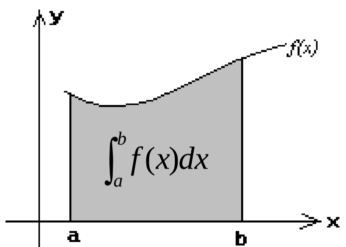
Obs. Na notação da integral definida pode-se usar outras letras que não seja x. Isto é, se f é integrável em [a, b], então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(s)ds = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \qquad etc.$$

Por essa razão a letra x na definição da ***integral definida***, é chamada de ***variável muda.***

Obs. A definição da *integral definida* pode ser aplicada de modo a considerar o caso em que o limite inferior é maior do que o limite superior. Isto é, se c > d então $\int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx$

Obs. Se os limites de integração são iguais, e se $f(a)$ existe então $\int_a^a f(x)dx = 0$

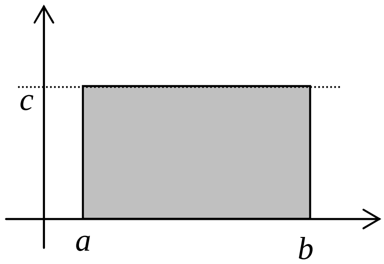


P$_{(1)}$: Se f é integrável e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então a área **A** da região sob o gráfico de f de a a b é $A = \int_a^b f(x)dx$. Graficamente temos a figura ao lado.

P$_{(2)}$: Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Obs. As integrais de funções descontínuas podem existir ou não, dependendo do tipo de descontinuidades.

P$_{(3)}$: Se f é uma função constante dada por $f(x) = c$, então A = $\int_a^b cdx = c(b-a)$



Geometricamente, a propriedade afirma que um retângulo com largura $b - a$ e altura $|c|$ tem área $|c|(b\text{-}a)$.

Em particular $\int_a^b dx = b - a$ e $\int_a^b 0dx = 0$

P$_{(4)}$: Se f é uma função integrável em $[a, b]$ e c é um número real arbitrário então cf é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

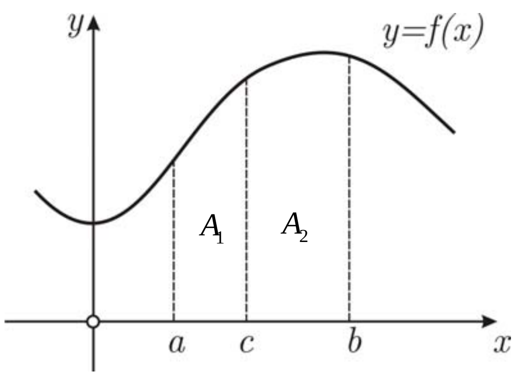
Geometricamente quando f é multiplicado por ***c*** os retângulos aproximadores na soma de Riemann têm suas alturas multiplicadas por c, consequentemente suas áreas são multiplicados por c.

P$_{(5)}$: Propriedade Aditiva – Se f e g são funções integráveis em [a, b] então $f \pm g$ são funções integráveis em [a, b] e, $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

A propriedade **P$_{(5)}$** pode ser estendida a um número finito arbitrário de funções $f_1, f_2, \ldots f_n$ integráveis em [a, b]. Assim, $\int_a^b [f_1(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$

P$_{(6)}$: Se $a < c < b$ é f uma função integrável tanto em [a, c]quanto em [c, b], então f é integrável em [a, b] e

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_c^b f(x)dx}_{A_2}$$



P(7): Comparação – Se *f* e *g* são funções integráveis em [*a*, *b*] e $f(x) \geq g(x)$ para todo *x* em [a, b], então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

P(8): Teorema do Valor Médio para Integrais

Se *f* é uma função contínua em um intervalo fechado [*a*, *b*], então existe um número *z* no intervalo aberto (*a*, *b*) tal que $\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a)$ ou equivalentemente $f(z) = \frac{1}{(b-a)}\int_b^b f(x)dx$

Questão: Nos seguintes itens, ache a área da região imitada pelas curvas dadas.

(**a**) $f(x)=x^2 - 4x$, x=1 e x=3; (**b**) $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$, x=–1 e x=2; (**c**) $f(x)=\sqrt{x-2}$, x=0 e x=5;

(**d**) $f(x)=4-x^2$, eixo-x; (**e**) $f(x)=x^2 - 6x+5$, eixo-x; (**f**) $f(x)=\text{sen}(x)$, eixo-x, x=0 e x=2π.

Texto composto em Microsoft Office Word, APC, 2010