CAPÍTULO IV

DERIVADAS PARCIAIS

4.1 Definições e Exemplos

Sejam $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Definições:

i) A **derivada parcial de** f **em relação à variável** x**, no ponto** $(x, y, z) \in A$ é denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ e definida por:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x + t, y, z) - f(x, y, z)}{t},}$$

se o limite existe.

ii) A **derivada parcial de** f **em relação à variável** y**, no ponto** $(x, y, z) \in A$ é denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ e definida por:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x, y + t, z) - f(x, y, z)}{t},}$$

se o limite existe.

iii) A **derivada parcial de** f **em relação à variável** z**, no ponto** $(x, y, z) \in A$ é denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ e definida por:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x, y, z + t) - f(x, y, z)}{t},}$$

se o limite existe.

De forma análoga são definidas as derivadas parciais para funções de duas variáveis.

Observe que o conjunto A deve ser aberto, pois para todo $\mathbf{x} \in A$ é necessário que $\mathbf{x}+t\,\mathbf{e}_i \in A$ $i = 1,\,2,\,3$, o que é verdadeiro se $|t| < \eta$ ($\eta > 0$ pequeno). Veja a bibliografia.

Exemplos:

1) Se $z = f(x,y) = x\,y$, calcule suas derivadas parciais. Estamos no caso $n = 2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{(x+t)\,y - x\,y}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{t\,y}{t} = y \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x,t+y) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{x\,(t+y) - x\,y}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{t\,x}{t} = x.$$

2) Se $w = f(x,y,z) = x^2\,y\,z^2$, calcule suas derivadas parciais. Estamos no caso $n = 3$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x+t,y,z) - f(x,y,z)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{(x+t)^2\,y\,z^2 - x^2\,y\,z^2}{t}\\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{2\,x\,y\,z^2\,t + t^2 y z^2}{t} = 2\,x\,y\,z^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x,t+y,z) - f(x,y,z)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{x^2\,(t+y)\,z^2 - x^2\,y\,z^2}{t}\\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{t\,x^2\,z^2}{t} = x^2\,z^2, \quad \text{e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x,y,t+z) - f(x,y,z)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{x^2\,y\,(t+z)^2 - x^2\,y\,z^2}{t}\\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{t^2\,x^2\,y + 2\,t\,x^2\,y\,z}{t} = 2\,x^2\,y\,z.\end{aligned}$$

Observações:

i) Seja $y = c$, fixado e consideremos $g(x) = f(x,c)$; logo:

$$g'(x) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x+t,c) - f(x,c)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,c);$$

analogamente, se $h(y) = f(c,y)$, então, $h'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(c,y)$.

ii) Consequentemente, para derivar parcialmente uma função em relação a x, as demais variáveis são consideradas como constantes e a derivação é feita como em $\mathbb{R}$. Em relação às outras variáveis o procedimento é análogo. Assim, todas as regras de derivação estudadas para funções em $\mathbb{R}$ podem ser aplicadas.

Exemplos:

1) Se $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, calcule suas derivadas parciais.

Calculemos, primeiramente, a derivada parcial de f em relação a x. Pela observação anterior consideramos $z = \sqrt{x^2 + c}$, onde $c = y^2$; derivando como em $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + c}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

analogamente para y: $c = x^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{c + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

2) Se $z = f(x, y) = x\, y + e^x\, cos(y)$, calcule suas derivadas parciais no ponto $(1, \pi)$.

Calculemos, primeiramente, a derivada parcial de f em relação a x. Pela observação anterior consideramos $z = cx + cos(c)e^x$, onde $y = c$; derivando como em $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = c + cos(c)\, e^x = y + cos(y)\, e^x;$$

analogamente para y: $z = c\, y + e^c\, cos(y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = c - e^c\, sen(y) = x - e^x\, sen(y);$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, \pi) = \pi - e$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, \pi) = 1$.

3) Se $w = f(x, y, z) = ln(x^2 + y^2 + z^2)$, calcule suas derivadas parciais.

Calculemos, primeiramente, a derivada parcial de f em relação a x. Seja $w = ln(x^2 + c)$, onde $c = y^2 + z^2$; derivando como em $\mathbb{R}$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2\, x}{x^2 + c} = \frac{2\, x}{x^2 + y^2 + z^2};$$

analogamente para y: $c = x^2 + z^2$ e para z: $c = x^2 + y^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2\,y}{y^2+c} = \frac{2\,y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2\,z}{c+z^2} = \frac{2\,z}{x^2+y^2+z^2}.$$

4) Se $w = f(x,y,z) = sen\left(\dfrac{x\,y}{z}\right)$, calcule suas derivadas parciais.

Calculemos, primeiramente, a derivada parcial de f em relação a x; seja $w = sen(c\,x)$, onde $c = \dfrac{y}{z}$; derivando:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = c\,cos(c\,x) = \frac{y}{z}cos\left(\frac{x\,y}{z}\right);$$

analogamente para y; $c = \dfrac{x}{z}$ e para z; $c = x\,y$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = c\,cos(c\,y) = \frac{x}{z}cos(\frac{x\,y}{z}), \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -c\,z^{-2}cos(\frac{c}{z}) = -\frac{x\,y}{z^2}\,cos(\frac{x\,y}{z}).$$

Observações:

i) De forma análoga ao Cálculo de uma variável, as derivadas parciais de uma função são funções e, portanto, podemos calcula-lás em pontos de seus domínios. Por exemplo, seja $f(x,y) = \ln{(x^2+y^2+1)}$; então:

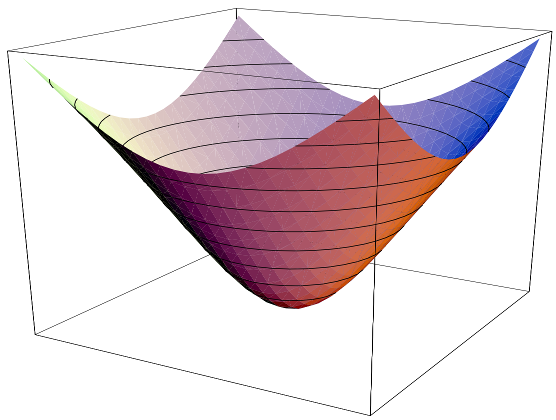
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2\,x}{x^2+y^2+1},$$

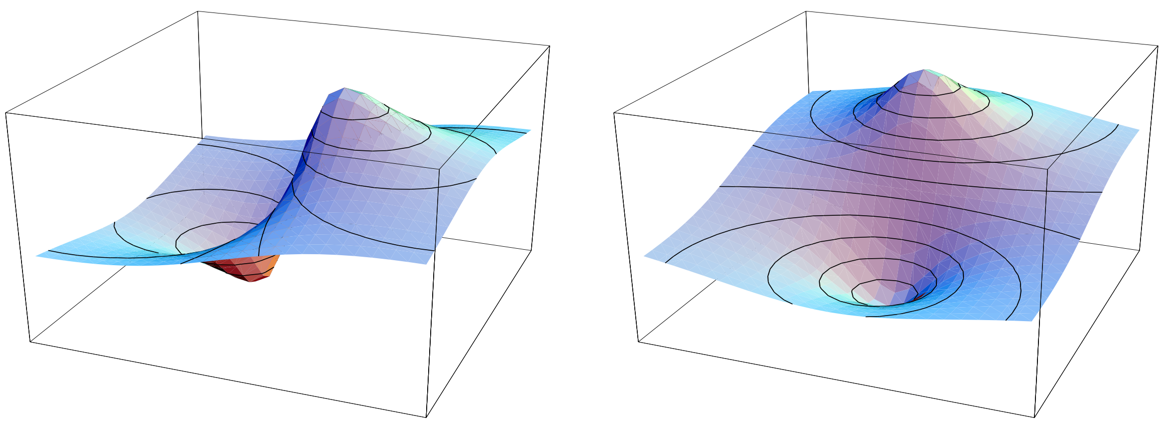
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2\,y}{x^2+y^2+1}.$$

Temos duas novas funções:

$$g(x,y) = \frac{2\,x}{x^2+y^2+1} \quad \text{e} \quad h(x,y) = \frac{2\,y}{x^2+y^2+1}.$$

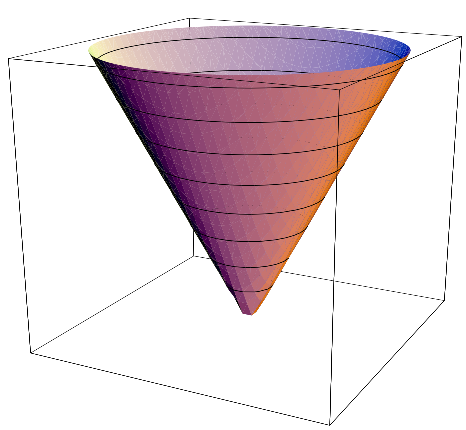
Logo, $g(1,1) = h(1,1) = \dfrac{2}{3}$, $g(3,-2) = \dfrac{3}{7}$ e $h(1,-2) = -\dfrac{2}{3}$. Os gráficos de f, g e h são, respectivamente:





ii) A não existência das derivadas parciais de uma função contínua de duas variáveis num ponto indica que o gráfico da função apresenta "arestas" nesse ponto.

De fato, seja $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; então, as derivadas parciais existem, exceto na origem. Veja o gráfico de f é:



4.2 Generalizações

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

<u>**Definição:**</u> A derivada parcial de f em relação à j-ésima variável no ponto $\mathbf{x} \in A$ é denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ e definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_1, ..., x_j + t, .., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{t},$$

se o limite existe.

Fazendo $j = 1, ..., n$, temos as derivadas parciais de f em relação à primeira, à segunda, à terceira,.......,à n-ésima variáveis, respectivamente. Denotando por $\mathbf{e}_j = (0, ..., 1, ...0)$ o vetor que tem todas as componentes zero exceto a j-ésima, que é igual a 1, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

4.3 Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

O gráfico de uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ é, em geral, uma superfície em $\mathbb{R}^3$. A interseção desta superfície com um plano paralelo ao plano xz, que passa pelo ponto $(0, y_0, 0)$ é uma curva plana (ou um ponto) que satisfaz às condições:

$$\begin{cases} z = & f(x, y) \\ y = & y_0. \end{cases}$$

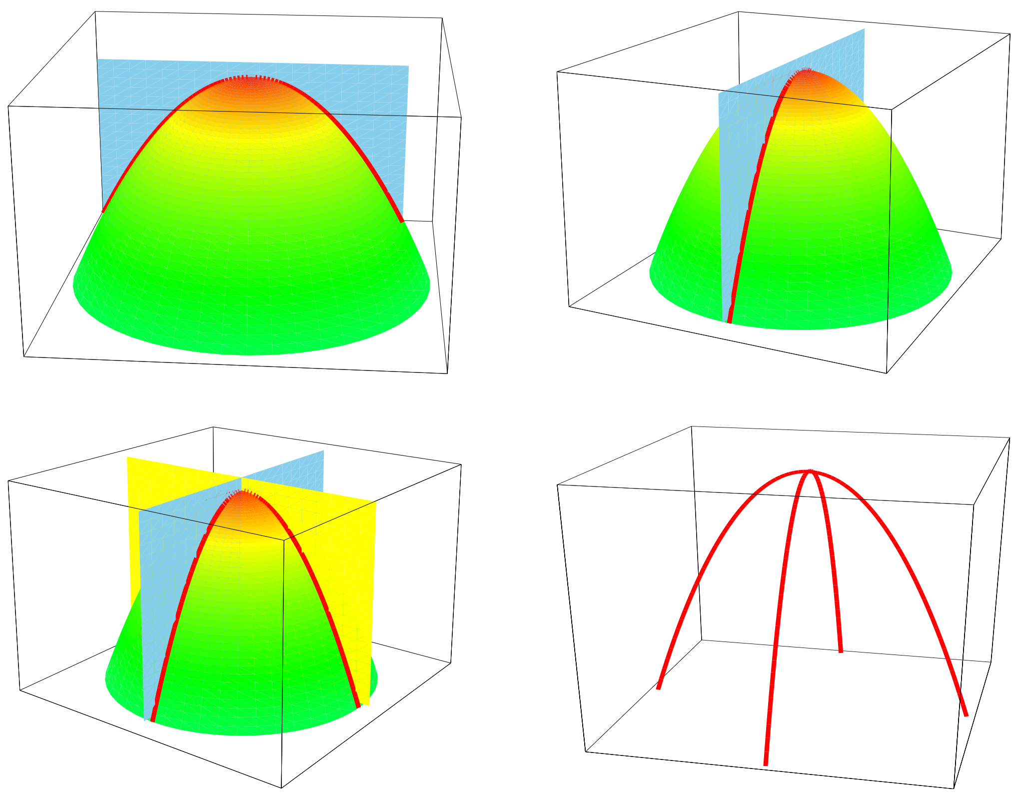
Como a curva é plana, podemos considerá-la como o gráfico de uma função de uma variável, a saber: $g(x) = f(x, y_0)$. Logo, o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto x_0, relativa ao plano, é:

$$\boxed{g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).}$$

Analogamente, a curva plana definida pela interseção do gráfico de f com o plano que passa por $(x_0, 0, 0)$ paralelo ao plano yz pode ser definida por $h(y) = f(x_0, y)$. Logo, o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto y_0, relativa ao plano, é:

$$\boxed{h'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).}$$

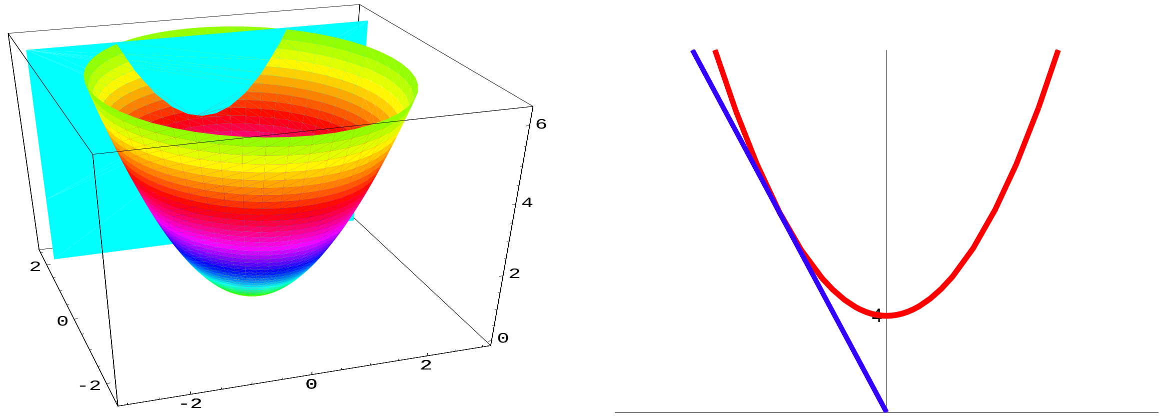
Desenhos à esquerda e direita, respectivamente:



Exemplos:

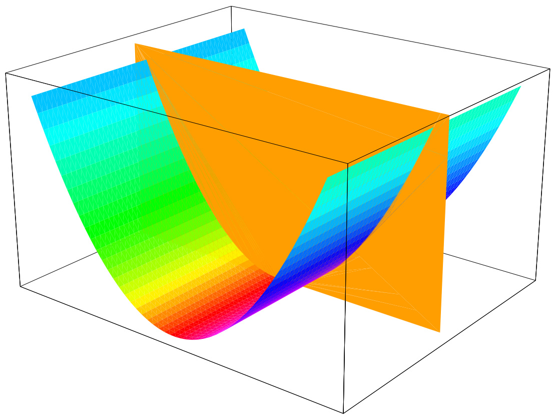
1) Seja $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Determine a equação da reta tangente à interseção do gráfico de f com o plano de equação $y = 2$, no ponto $(2, 2, 8)$.

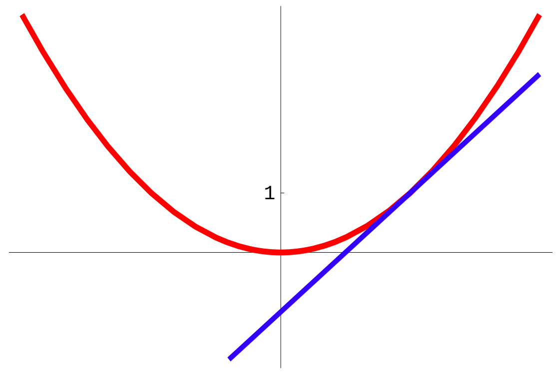
Pela observação anterior: $z = x^2 + 4$; logo, $z = g(x) = x^2 + 4$ e a equação da reta tangente é: $z - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$, onde $x_0 = 2$, ou seja: $z - 4x = 0$.



2) Seja $z = f(x, y) = y^2$. Determine a equação da reta tangente à interseção do gráfico de f com o plano de equação $x = x_0$, no ponto $(x_0, 1, 1)$.

Pela observação anterior: $z = y^2$; logo $z = h(y) = y^2$ e a equação da reta tangente é: $z - h(y_0) = h'(y_0)\,(y - y_0)$, onde $y_0 = 1$, ou seja: $z - 2y + 1 = 0$.





Dos parágrafos anteriores temos:

Proposição: Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais existam no conjunto aberto A, então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a) \quad \text{se} \quad g(x) = f(x, b)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = h'(b) \quad \text{se} \quad h(y) = f(a, y)$$

A prova segue das definições e observações anteriores. Esta proposição se extende naturalmente para $n \geq 2$.

Exemplos:

1) Se $f(x, y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Seja $g(x) = f(x, 0) = x$ e $h(y) = f(0, y) = y$; logo $g'(x) = 1$ e $h'(y) = 1$; então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1.$$

2) Se $f(x, y) = x^2 \sqrt{(x^2 + y^2\, ln(y^2 + 1))^{-5}}\, e^{tg(x^2\, y + y^3\, x^2)}$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$.

Seja $g(x) = f(x, 0) = x^{-3}$ e $g'(x) = -3\, x^{-4}$; logo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = g'(1) = -3.$$

3) Se $f(x,y,z) = \dfrac{cos(x+y+z)}{ln(x^2+y^2+z^2)}$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\pi,0,0)$.

Seja $g(x) = f(x,0,0) = \dfrac{cos(x)}{2\,ln(x)}$ e $g'(x) = -\dfrac{x\,ln(x)\,sen(x) + cos(x)}{2\,x\,ln^2(x)}$; logo:

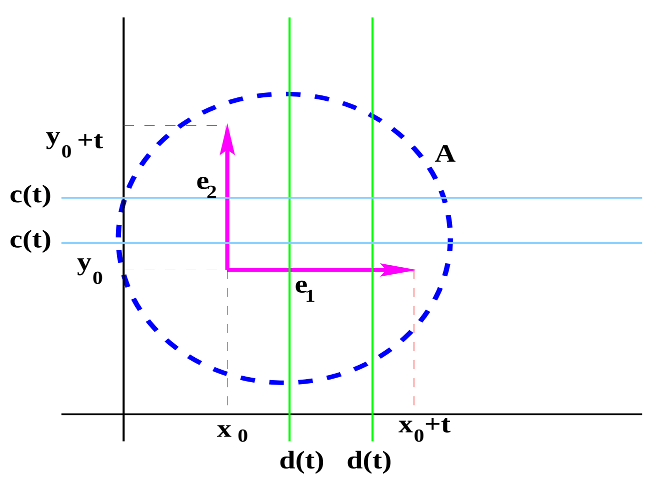
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,0,0) = g'(\pi) = \frac{1}{2\,\pi\,ln^2(\pi)}.$$

4.4 Derivadas Parciais como Taxa de Variação

As derivadas parciais também podem ser interpretadas como taxa de variação ou razão instantânea. De fato, seja $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais existem no ponto (x_0, y_0).

A derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ é a **taxa de variação** de f ao longo da reta que passa pelo ponto (x_0,y_0) e na direção $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, isto é, $c(t) = (x_0,y_0) + t\,(1,0) = (x_0+t, y_0)$, ($|t|$ pequeno).

De forma análoga interpretamos a outra derivada parcial: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ é a **taxa de variação** de f ao longo da reta que passa pelo ponto (x_0,y_0) e na direção $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, isto é, $d(t) = (x_0,y_0) + t\,(0,1) = (x_0, y_0+t)$, ($|t|$ pequeno).



Isto é, as derivadas parciais medem a velocidade da variação parcial da função em relação a cada variável, quando as outras estão fixadas.

Exemplos:

1) A lei de um gás ideal confinado é $PV = 8T$, onde P é a pressão em N/cm^2, V é o volume em cm^3 e T é a temperatura em graus. Se o volume do gás é de $150\,cm^3$ e a temperatura é de 100^o, pede-se:

i) Determine a taxa de variação da pressão em relação à temperatura para o volume fixo de $150\,cm^3$.

ii) Determine a taxa de variação do volume em relação à pressão para a temperatura fixa de 100^o.

i) Escrevamos a pressão em função do volume e da temperatura:

$$P(V,T) = 8\,\frac{T}{V}; \quad \text{então,} \quad \frac{\partial P}{\partial T}(V,T) = \frac{8}{V};$$

logo,

$$\frac{\partial P}{\partial T}(150,T) \cong 0.0533\ N/cm^2/kal.$$

A variação da pressão em relação à temperatura cresce a uma razão de $0.0533\ N/cm^2/kal$. Note que $\dfrac{\partial P}{\partial T}$ não depende de T.

ii) Escrevemos o volume em função da pressão e da temperatura:

$$V(P,T) = 8\,\frac{T}{P}; \quad \text{então,} \quad \frac{\partial V}{\partial P}(P,T) = -8\,\frac{T}{P^2}.$$

Por outro lado, $P = 8\,\dfrac{T}{V}$ e para $T = 100$ e $V = 150$, obtemos $P = \dfrac{16}{3}$; logo:

$$\frac{\partial V}{\partial P}(\frac{16}{3}, 100) = -28.13\ cm^3/N.$$

A variação do volume em relação à pressão diminui a uma razão de $28.13\ cm^3/N$.

2) O potencial elétrico no ponto (x,y,z) é dado por:

$$V(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

onde V é dado em volts e x, y e z em cm. Determine a taxa de variação instantânea de V em relação à distância em $(1,2,3)$ na direção do:

i) eixo dos x;

ii) eixo dos y;

iii) eixo dos z.

i) Devemos calcular $\dfrac{\partial V}{\partial x}(1,2,3)$.

Seja $g(x) = f(x,2,3) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+13}}$; então:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,2,3) = g'(x) = \frac{13}{(x+13)^{3/2}},$$

logo; $\dfrac{\partial V}{\partial x}(1,2,3) = \dfrac{13}{14\sqrt{14}}\, volts/cm.$

ii) Devemos calcular $\dfrac{\partial V}{\partial y}(1,2,3)$:

Seja $h(y) = f(1,y,3) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+10}}$; então:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = h'(y) = -\frac{y}{(y^2+10)^{3/2}},$$

logo; $\dfrac{\partial V}{\partial y}(1,2,3) = -\dfrac{1}{7\sqrt{14}}\, volts/cm.$

iii) Devemos calcular $\dfrac{\partial V}{\partial z}(1,2,3)$:

Seja $k(z) = f(1,2,z) = \dfrac{1}{\sqrt{z^2+5}}$; então:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = k'(z) = -\frac{z}{(z^2+5)^{3/2}},$$

logo; $\dfrac{\partial V}{\partial z}(1,2,3) = -\dfrac{3}{14\sqrt{14}}\, volts/cm.$

3) Quando materiais tóxicos são despejados ou manipulados num aterro podem ser liberadas partículas contaminadas para a atmosfera circundante. Experimentalmente, a emissão destas partículas pode ser modelada pela função:

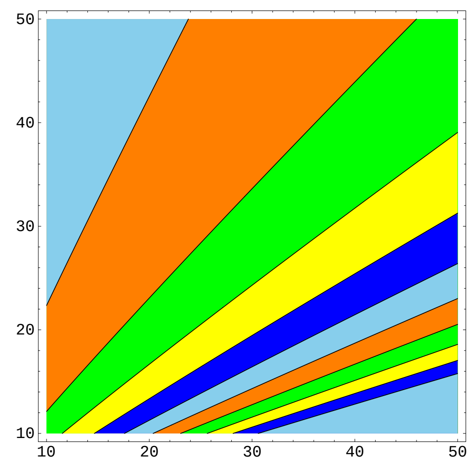
$$E(V,M) = K \times 0.00032\, V^{1.3}\, M^{-1.4},$$

onde E é a emissão (quantidade de partículas liberadas na atmosfera por tonelada de solo manipulado), V é a velocidade média do vento (mph=metros por hora), M é a umidade contida no material (dada em porcentagem) e K é uma constante que depende do tamanho das partículas. Calcule a taxa de variação da emissão para uma partícula tal que $K = 0.2$, $V = 10$ e $M = 13$ em relação:

i) ao vento;

ii) à umidade.

Curvas de nível de E:



i) Calculamos $\dfrac{\partial E}{\partial V}(10,13)$:

Então, $\dfrac{\partial E}{\partial V}(V,M) = 0.000122\, V^{0.3}\, M^{-1.4}$; logo,

$$\frac{\partial E}{\partial V}(10,13) = 0.00001496.$$

ii) Calculamos $\dfrac{\partial E}{\partial M}(10,13)$:

Então, $\dfrac{\partial E}{\partial M}(V,M) = -0.000291\, V^{1.3}\, M^{-2.4}$; logo,

$$\frac{\partial E}{\partial M}(10,13) = -0.00001234.$$

Interprete os resultados obtidos no último exemplo.