Comprimento de um arco

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ cujo gráfico descreve o arco $\widehat{AB}$, conforme ilustra a 1.24

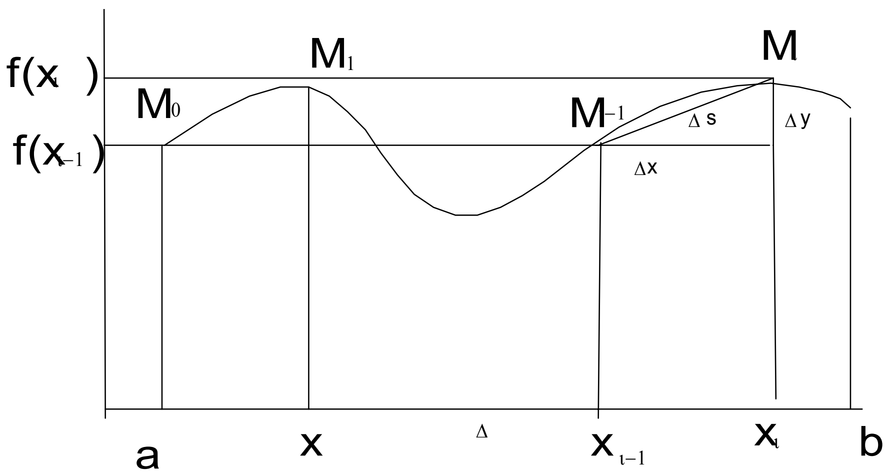

Figura 1.24: Comprimento de arco

Vamos dividir o arco $\widehat{AB}$ em subarcos por meio da partição

$$X = \{M_0, M_1, M_2, ..., M_n\}$$

em que

$$A = M_0 < M_1 < M_2 < ..... < M_n = B$$

e abscissas são

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_n.$$

Tracemos as cordas

$$\overline{M_0M_1}, \overline{M_1M_2}, ..., \overline{M_{i-1}M_i}, ..., \overline{M_{n-1}M_n}$$

e designemos os seus comprimentos por

$$\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_i, ..., \Delta S_n.$$

Obtem-se então a linha poligonal

$$AM_0M_1, ..., M_{n-1}B$$

ao longo do arco $\widehat{AB}$ cujo comprimento aproximado é:

$$l_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + ... + \Delta S_i + ... + \Delta S_n$$

ou

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i . (I)$$

Mas ΔS_i é a hipotenusa do triângulo de lados Δx_i e Δy_i. de modo que podemos escrever

$$(\Delta S_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2$$

dividindo tudo por Δx_i vem

$$\left(\frac{\Delta S_i}{\Delta x_i}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2$$

ou

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta x_i} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

ou seja

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \text{ (II)}$$

Como

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ e } \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

segue que

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

e pelo teorema de Lagrange, existe $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)$$

Portanto, obtemos $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$ (III).

Agora substituindo (II) em (I) resulta

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \text{ (IV)}$$

substuindo (III) em (IV)resulta

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$$

Seja $|\Delta x|$ o intervalo de maior diâmetro de cada partição de $\widehat{AB}$. Então, se $n \to \infty$ segue que $|\Delta x| \to 0$ e $(\xi_i) \to x$. Assim:

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{|\Delta x|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Portanto, o comprimento do arco $\widehat{AB}$ no intervalo $[a, b]$ é dado por

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \tag{1.3}$$

Exemplo 1.36. *Determinar o comprimento do arco na função* $y = \sqrt{x}$ *no intervalo* $[0, 4]$.

Solução: a figura 1.25 ilustra o comprimento de arco

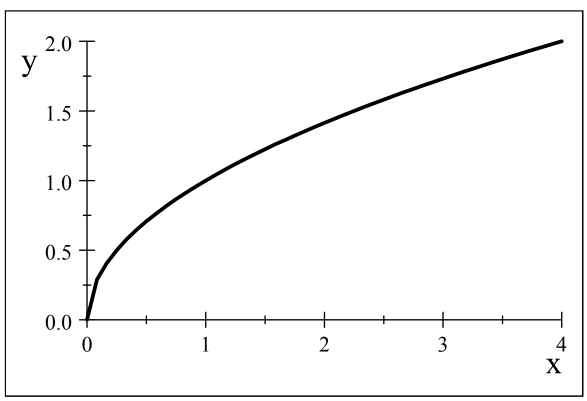

Figura 1.25: $f(x) = \sqrt{x}$

Sendo $y = f(x) = \sqrt{x}$ temos $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Assim, aplicando a fórmula 1.3 vem

$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f''(x))^2}dx$

$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx$

$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx$

$l = \int_0^4 \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx$

$l = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}}dx$

tendo $t^2 = x$ temos $dx = 2tdt$, $t \in [0, 2]$.

$l = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\sqrt{4t^2+1}}{\sqrt{t^2}}2tdt = \int_0^2 \sqrt{4t^2+1}dt$

a primitiva de $\sqrt{4t^2+1}$é tabelada, logo

$l = \frac{1}{2}t\sqrt{4t^2+1} + \frac{1}{4}\ln\left(2t + \sqrt{4t^2+1}\right)|_0^2$

Cujo resultado é

$l = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17} + 4\right)$