



UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET / CAMPUS I

DISCIPLINA: Cálculo II (MAT 089)

CH: 75

PROFESSOR: Adriano Cattai

SEMESTRE: 2012.1

ALUNO: _____

APOSTILA 01: INTEGRAL INDEFINIDA E TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

1.1 Integração

O Cálculo Diferencial lida com o problema de se determinar a taxa de variação de uma quantidade com relação a outra. Iniciaremos o estudo de uma outra parte do cálculo, conhecida como *Cálculo Integral*. Aqui estamos interessados precisamente no problema oposto:

Se conhecemos a taxa de variação de uma quantidade em relação a outra, podemos determinar a relação entre essas quantidades?

A ferramenta principal utilizada no estudo do cálculo integral é a antiderivada de uma função, e desenvolvemos regras para a antiderivação, ou integração, como é chamado o processo de encontrar a antiderivada ou integral indefinida. A derivada foi motivada por problemas de determinação do coeficiente angular de uma reta tangente e definição de velocidade. A integral definida, como veremos, surge de modo natural quando consideramos o problema da determinação da área de uma região curvilínea. Esta é, entretanto, apenas uma das aplicações.

Veremos que o conceito de integral, que é formado totalmente independente do conceito de derivada, guarda com este uma relação muito importante. Esta relação entre os dois conceitos foi estabelecida por Newton e Leibniz no século XVII, sendo hoje conhecida como o Teorema Fundamental do Cálculo.

Assim, além de introduzirmos técnicas de integração (antidiferenciação), o conceito de integral e tratarmos das propriedades e de suas relações com a derivada, apresentaremos algumas aplicações do cálculo de comprimentos, áreas, volumes e equações diferenciáveis com variáveis separáveis, onde esta última, na versão bem leve, pois equações diferenciáveis será uma unidade da disciplina Cálculo III.

1.1.1 Antidiferenciação: A Integral Indefinida

Em estudos anteriores resolvemos problemas do tipo: *Dada uma função f , determinar sua derivada f'* . Estudaremos agora um problema relacionado: *Dada uma função f , achar uma função F tal que $F' = f$* . Ou seja, a operação inversa da derivada.

1.1 Definição. Uma função F será chamada de *antiderivada* ou *primitiva* de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x no intervalo I .

Exemplo 1.1. Se F for definida por $F(x) = x^2$, então $F'(x) = 2x$. Assim, se f for a função definida por $f(x) = 2x$, então f é a derivada de F e F é uma antiderivada, ou primitiva, de f .

Note que, se G for a função definida por $G(x) = x^2 + 3$ então, G também será uma primitiva de f , pois $G'(x) = 2x$. Na verdade, há uma infinidade de primitivas para $2x$. De modo geral, se K é uma constante arbitrária, então $x^2 + K$ é uma primitiva de $2x$, do fato em que a derivada de uma constante é zero, ou seja

$$D_x(x^2 + K) = 2x + 0 = 2x.$$

Assim, existe uma família de antiderivadas de $2x$. Resumimos nos seguintes teoremas.

1.2 Teorema. Seja F uma antiderivada de f num intervalo I . Se G é uma outra antiderivada de f em I , então

$$G(x) = F(x) + K$$

para alguma constante arbitrária K e para todo x em I .

Prova: Seja H a função definida em I por $H(x) = G(x) - F(x)$. Então, para todo x em I temos que $H'(x) = G'(x) - F'(x)$. Mas, por hipótese, $G'(x) = F'(x)$ para todo x em I , logo $H'(x) = 0$ para todo x em I . Portanto H é uma função constante, digamos $H(x) = K$, assim $G(x) = F(x) + K$, para todo x em I .

1.3 Teorema. Seja F uma antiderivada particular de f num intervalo I . Então, toda antiderivada de f em I será da forma

$$F(x) + K$$

onde K é uma constante arbitrária e todas as antiderivadas de f em I poderão ser obtidas atribuindo-se certos valores a K .

Prova: Suponha que G represente qualquer antiderivada de f em I , então $G'(x) = f(x)$, para todo x em I . Mas, F é uma antiderivada particular de f em I , então $F'(x) = f(x)$ para todo x em I . Segue portanto que $G'(x) = F'(x)$ para todo x em I . Logo, pelo teorema anterior, existe uma constante K , tal que $G(x) = F(x) + K$ para todo x em I . Como G representa qualquer antiderivada de f em I , segue que toda antiderivada de f pode ser obtida de $F(x) + K$, onde K é uma constante arbitrária.

1.4 Definição (A Integral Indefinida). O processo de se determinar todas as antiderivadas de uma função é chamado de *antidiferenciação* ou *integração*. Usamos o símbolo \int , chamado de *sinal da integral*, para indicar que a operação de integração deve ser executada sobre uma função f . Assim

$$\int f(x)dx = F(x) + K$$

nos diz que a integral indefinida de f é a família de funções dada por $F(x) + K$, onde $F'(x) = f(x)$. A função f a ser integrada é chamada de *integrando*, e a constante K é chamada de *constante de integração*.

1.5 Observação. A expressão dx que segue ao integrando $f(x)$ lembra-nos de que a operação é executada com respeito a x . Se a variável independente é t , escrevemos $\int f(t)dt$. Neste caso, dizemos que tanto t quanto x são variáveis mudas.

Exemplo 1.2.

- (a) $\int 3x^2 dx = x^3 + K$ pois $(x^3 + K)' = 3x^2$;
- (b) $\int \cos(t) dt = \text{sen}(t) + K$ pois $(\text{sen}(t) + K)' = \cos(t)$;
- (c) $\int e^u du = e^u + K$ pois $(e^u + K)' = e^u$;
- (d) $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + K$ pois $(\ln(x) + K)' = \frac{1}{x}$.

O seguinte teorema estabelece que diferenciação e integração indefinida são processos inversos porque, de certo modo, um desfaz o outro.

1.6 Teorema.

$$(i) \int (D_x f(x)) dx = f(x) + K$$

$$(ii) D_x \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$$

Prova: A verificação para (i) é Óbvia! Verifiquemos (ii). Suponha que F é uma antiderivada de f , ou seja, $F' = f$. Assim,

$$D_x \left(\int f(x) dx \right) = D_x (F(x) + K) = D_x (F(x)) + D_x (K) = f(x) + 0 = f(x).$$

Regras Básicas de Integração

Acabamos de ver que $\int f'(x) dx = f(x) + K$. E isto permite usarmos qualquer fórmula de derivada para obter uma fórmula correspondente de integral indefinida, que chamamos de integral imediata, como na tabela a seguir.

| Derivada $f'(x)$ | Integral Indefinida $\int f'(x) dx = f(x) + K$ |
|---|---|
| $(x)' = 1$ | $\int dx = x + K$ |
| $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$ | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$ |
| $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ | $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + K$ |
| $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ | $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + K$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $\int e^x dx = e^x + K$ |

1.7 Observação. A fórmula dada na 3ª linha, é chamada de regra da potência para integral indefinida, para tanto, é preciso que tenhamos $n \neq -1$. Como se vê no exemplo a seguir, frequentemente é preciso modificar a forma de um integrando para aplicar a regra da potência, ou uma identidade trigonométrica.

Exemplo 1.3.

(a) $\int x^3 \cdot x^2 dx = \int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + K = \frac{1}{6}x^6 + K;$

(b) $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + K = -\frac{1}{x} + K;$

(c) $\int \sqrt[3]{y} dy = \int y^{\frac{1}{3}} dy = \frac{y^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + K = \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} + K;$

(d) $\int \frac{\text{tg}(z)}{\sec(z)} dz = \int \cos(z) \cdot \frac{\text{sen}(z)}{\cos(z)} dz = \int \text{sen}(z) dz = -\cos(z) + K;$

(e) $\int \frac{1}{\cos(u) \cdot \text{cotg}(u)} du = \int \sec(u) \cdot \text{tg} u du = \sec(u) + K.$

Prosseguindo, como na tabela anterior, temos as seguintes integrais imediatas:

| | |
|--|--|
| 1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K, n \neq -1;$ | 9. $\int \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x) dx = \sec(x) + K;$ |
| 2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + K;$ | 10. $\int \operatorname{cossec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x) dx = -\operatorname{cossec}(x) + K;$ |
| 3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + K, 0 < a \neq 1;$ | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + K;$ |
| 4. $\int e^x dx = e^x + K;$ | 12. $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccos}(x) + K;$ |
| 5. $\int \operatorname{sen}(x) dx = -\operatorname{cos}(x) + K;$ | 13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + K;$ |
| 6. $\int \operatorname{cos}(x) dx = \operatorname{sen}(x) + K;$ | 14. $\int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arccotg}(x) + K;$ |
| 7. $\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + K;$ | 15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}(x) + K;$ |
| 8. $\int \operatorname{cossec}^2(x) dx = -\operatorname{cotg}(x) + K;$ | 16. $\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccossec}(x) + K;$ |

1.8 Observação. À medida que avançamos, novas integrais imediatas serão apresentadas. Para tanto, precisaremos de algumas técnicas (ou métodos). Os exemplos (integrais) contendo o símbolo ★, serão chamados de *exemplos estrela*. Esses exemplos irão completar nossa tabela de integrais imediatas, mas não na sua totalidade.

Propriedades Operatórias da Integral Indefinida

Resumimos no seguinte teorema, de fácil verificação.

1.9 Teorema. Sejam f e g duas funções com primitivas num intervalo I e $c \neq 0$ uma constante qualquer, então

- (i) $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx;$
- (ii) $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$

Prova:

(i) Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$. Então, $c \cdot F(x)$ é uma primitiva de $c \cdot f(x)$, pois

$$(c \cdot F(x))' = k \cdot F'(x) = c \cdot f(x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int c \cdot f(x) dx &= c \cdot F(x) + K = c \cdot F(x) + c \cdot K_1, (c \cdot K_1 = K) \\ &= c \cdot (F(x) + K_1) \\ &= c \cdot \int f(x) dx. \end{aligned}$$

(ii) Sejam $F(x)$ e $G(x)$ duas primitivas quaisquer das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Então, $F(x) \pm G(x)$ é uma primitiva da função $f(x) \pm g(x)$, pois

$$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x)) dx &= (F(x) \pm G(x)) + K \\ &= (F(x) \pm G(x)) + K_1 + K_2, \quad (K_1 + K_2 = K) \\ &= (F(x) + K_1) \pm (G(x) + K_2) \\ &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx. \end{aligned}$$

Este último teorema estabelece que para determinar uma antiderivada de uma constante vezes uma função, achamos primeiro uma antiderivada da função, multiplicando-a, em seguida, pela constante. E, para determinar uma antiderivada da soma (ou subtração) de duas funções, achamos primeiro a antiderivada de cada uma das funções separadamente e então, somamos (ou subtraímos) o resultado.

O teorema seguinte, de prova análoga, estende para um número qualquer, finito, de funções.

1.10 Teorema. Se f_1, f_2, \dots, f_n estão definidas num intervalo, então

$$\int (c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x) \pm \dots \pm c_n f_n(x)) dx = c_1 \int f_1(x) dx \pm c_2 \int f_2(x) dx \pm \dots \pm c_n \int f_n(x) dx,$$

em que c_1, c_2, \dots, c_n são constantes.

Nota 1. Não há uma propriedade análoga para o produto entre funções, ou seja,

$$\int f(x) \cdot g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx,$$

como ilustra o seguinte contra-exemplo.

Exemplo 1.4. Facilmente, vemos que $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K$ e que $\int x dx = \frac{x^2}{2} + K_1$. Deste modo, se supusermos que $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$ teremos:

$$\begin{aligned} \int x^2 dx &= \int (x \cdot x) dx = \int x dx \cdot \int x dx = \left(\frac{x^2}{2} + K_1\right) \cdot \left(\frac{x^2}{2} + K_1\right) \\ &= \text{um polinômio de grau 4.} \end{aligned}$$

Um absurdo, pois $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K$ tem grau 3.

Exemplo 1.5. Vejamos algumas integrais indefinidas.

$$\begin{aligned} (a) \int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7) dx &= 5 \int x^4 dx - 8 \int x^3 dx + 9 \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int 7 dx \\ &= 5 \cdot \frac{1}{5} x^5 - 8 \cdot \frac{1}{4} x^4 + 9 \cdot \frac{3}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 7x + K \\ &= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \int \sqrt{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx &= \int x^{\frac{1}{2}} (x + x^{-1}) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + K = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \int \frac{2x^3 + 1}{x^2} dx &= \int \left(\frac{2x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{2x^3}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = 2 \int x dx + \int x^{-2} dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^{-1}}{-1} + K = x^2 - \frac{1}{x} + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \int \frac{x^2}{x^2+1} dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= x - \arctg(x) + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e) \int (3 \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x) - 5 \operatorname{cosec}^2(x)) dx &= 3 \int \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x) dx - 5 \int \operatorname{cosec}^2(x) dx \\ &= 3 \sec(x) - 5(-\operatorname{cotg}(x)) + K \\ &= 3 \sec(x) + 5 \operatorname{cotg}(x) + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f) \int \frac{2 \operatorname{cotg}(x) - 3 \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx &= 2 \int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \operatorname{cotg}(x) dx - 3 \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx \\ &= 2 \int \operatorname{cosec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x) dx - 3 \int \operatorname{sen}(x) dx \\ &= 2(-\operatorname{cosec}(x)) - 3(-\cos(x)) + K = 3 \cos(x) - 2 \operatorname{cosec}(x) + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g) \int (\operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{cotg}^2(x) + 4) dx &= \int ([\sec^2 - 1] + [\operatorname{cosec}^2(x) - 1] + 4) dx \\ &= \int \sec^2(x) dx + \int \operatorname{cosec}^2(x) dx + 2 \int dx \\ &= \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x) + 2x + K. \end{aligned}$$

Note que neste último exemplo, usamos as identidades $\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$ e $\operatorname{cotg}^2(x) + 1 = \operatorname{cosec}^2(x)$. As identidades trigonométricas são frequentemente usadas quando calculamos integrais envolvendo funções trigonométricas. As identidades fundamentais a seguir são cruciais.

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}(x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, & \sec(x) &= \frac{1}{\cos(x)}, & \operatorname{tg}(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, & \operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \\ \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) &= 1, & \operatorname{tg}^2(x) + 1 &= \sec^2(x), & \operatorname{cotg}^2(x) + 1 &= \operatorname{cosec}^2(x). \end{aligned}$$

Equações Diferenciais: uma Visão Muito, Muito, Simples

Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função e suas derivadas. Muitos problemas aplicados podem ser enunciados em termos de uma *equação diferencial*. Uma função f é *solução* de uma equação diferencial se verifica a equação, isto é, se a substituição da função incógnita por f resulta em uma identidade. *Resolver* uma equação diferencial significa achar todas as suas soluções. Em alguns casos, além da equação diferencial, podemos conhecer certos valores de f , chamados *condições iniciais*.

As integrais indefinidas são úteis para a resolução de certas equações diferenciais, porque, dada uma derivada $f'(x)$, podemos integrá-la e usar o Teorema 1.9 para obter uma equação envolvendo a função incógnita f :

$$\int f'(x) dx = f(x) + K.$$

Dada uma condição inicial para f , é possível determinar $f(x)$ explicitamente, como no exemplo a seguir.

Exemplo 1.6. Resolva a equação diferencial $y' = 6x^2 + x - 5$ sujeita à condição inicial $y(0) = 2$.

Solução: Escrevendo $y' = \frac{dy}{dx}$, temos $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + x - 5$ e $dy = (6x^2 + x - 5)dx$. Portanto,

$$y = \int dy = \int (6x^2 + x - 5) dx = 2x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + K.$$

A condição inicial $y(0) = 2$, diz que para $x = 0$ temos $y = 2$, assim $y(0) = 0 + 0 - 0 + K = 2$, ou seja $K = 2$.

Logo a solução da equação diferencial dada, com a condição inicial $y(0) = 2$, é

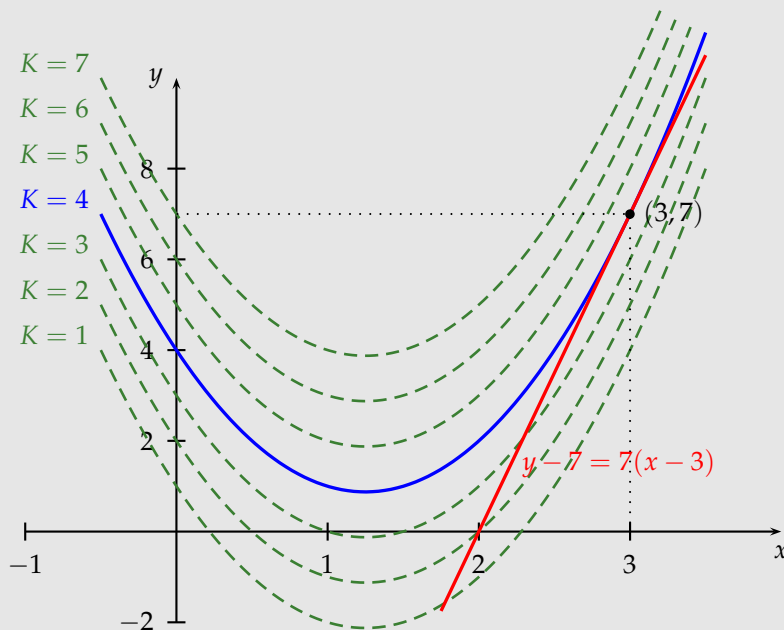
$$y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2.$$

Exemplo 1.7. Em qualquer ponto (x, y) de uma determinada curva, a reta tangente tem uma inclinação igual a $4x - 5$. Se a curva contém o ponto $(3, 7)$, ache sua equação.

Solução: Como a inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto (x, y) é o valor da derivada nesse ponto, temos $\frac{dy}{dx} = 4x - 5$, e então

$$y = \int dy = \int (4x - 5) dx = 2x^2 - 5x + K.$$

A equação $y = 2x^2 - 5x + K$ representa uma família de curvas. Como queremos determinar uma certa curva dessa família que contenha o ponto $(3, 7)$, a substituição x por 3 e y por 7, obtém-se $K = 4$, e portanto $y = 2x^2 - 5x + 4$ é a equação da curva pedida.



Exemplo 1.8. Uma equação da reta tangente t à curva C no ponto $(1, 3)$ é $t : y = x + 2$. Se em qualquer ponto (x, y) da curva $y = f(x)$ se tem $y'' = 6x$, encontrar uma equação para esta curva.

Solução: Pela equação da reta tangente à curva no ponto $(1, 3)$, temos que a sua inclinação neste ponto é $m_t(1) = 1$ (que é o coeficiente angular da reta t). Então, temos que $y'(1) = 1$. De $y'' = 6x$, lembrando que $y'' = \frac{dy'}{dx}$, ou ainda $dy' = y'' dx = 6x dx$, integrando em relação à x , obtemos:

$$y' = \int dy' = \int 6x dx = 6 \cdot \frac{x^2}{2} + K_1 = 3x^2 + K_1.$$

Como já temos $y'(1) = 1$, substituindo na igualdade acima, obtemos:

$$1 = 3 \cdot 1^2 + K_1 \Rightarrow K_1 = -2.$$

Daí, temos que $y' = 3x^2 - 2$. Como $y' = \frac{dy}{dx}$, ou ainda $dy = y' dx$. Integrando, mais uma vez, em relação à x , temos:

$$y = \int dy = \int y' dx = \int (3x^2 - 2) dx = \frac{3x^3}{3} - 2x + K_2 = x^3 - 2x + K_2.$$

Uma vez que o ponto $(1, 3)$ pertence à curva, temos que $y = 3$ quando $x = 1$. Portanto, substituindo, temos:

$$3 = 1^3 - 2 \cdot 1 + K_2 \Rightarrow K_2 = 4.$$

Portanto, uma equação para a curva C é $y = x^3 - 2x + 4$.

A função $f(x) = e^x$ possui derivada $f'(x) = e^x$, ou seja, neste caso $f' = f$. O exemplo seguinte determina todas as funções cuja derivada resulta na própria função.

Exemplo 1.9. Determine todas as funções $y = f(x)$ tais que $y' = y$.

Solução: Escrevendo $y' = \frac{dy}{dx}$, supondo $y' = y$, temos $\frac{dy}{dx} = y$, donde $\frac{dy}{y} = dx$. Integrando, temos

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln(y) = x + K_1.$$

Assim, $y = e^{x+K_1}$. Pondo $e^{K_1} = K$, temos $y = K \cdot e^x$. Como $K \in \mathbb{R}$, temos assim todas as funções tais que $y' = y$.

Interpretação Cinética

Do estudo da cinética sabemos que a posição de um ponto material em movimento, sobre uma curva C (trajetória) conhecida, pode ser determinada, em cada instante t , através de sua abscissa s , medida sobre a curva C . A expressão que nos dá s em função de t é $s = s(t)$, e é chamada *equação horária*.

Sendo dado um instante t_0 e sendo t um instante diferente de t_0 , chamamos *velocidade média* do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

e chama-se *velocidade escalar* do ponto no instante t_0 o limite

$$v_{(t_0)} = \lim_{t \rightarrow t_0} v_m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0).$$

Em outras palavras, a derivada da função $s = s(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0 .

Sabemos ainda que a velocidade v de um ponto material em movimento pode variar de instante para instante. A equação que nos dá v em função do tempo t é $v = v(t)$, e é chamada *equação da velocidade* do ponto. Chama-se a *aceleração média* do ponto entre os instantes t e t_0 o quociente

$$a_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

e chama-se *aceleração escalar* do ponto no instante t_0 o limite:

$$a_{(t_0)} = \lim_{t \rightarrow t_0} a_m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0).$$

Em outras palavras, a derivada da função $v = v(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0 .

Exemplo 1.10. Suponha que um ponto percorre uma curva obedecendo à equação horária $s = t^2 + t - 2$ (Unidades SI). No instante $t_0 = 2$ a velocidade é dada pela derivada s' no ponto 2, ou seja,

$$\begin{aligned} v_{(2)} &= s'(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t^2 + t - 2) - (2^2 + 2 - 2)}{t - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + t - 6}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t - 2)(t + 3)}{t - 2} = 5 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

No entanto, podemos, por meio da integração indefinida, percorrer o caminho inverso, ou seja, dada a aceleração $a(t)$, temos $v(t) = \int a(t) dt$, e então $s(t) = \int v(t) dt$.

Exemplo 1.11. Mostre que para um movimento em uma reta com aceleração constante a , com velocidade inicial v_0 e deslocamento inicial s_0 , o deslocamento do móvel após o instante t é dado por $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Solução: Como temos que a aceleração $\left(v'(t) = \frac{dv}{dt}\right)$ do móvel é constante e igual a a , então temos que $v'(t) = \frac{dv}{dt} = a$, onde a é constante. Pondo $v'(t)dt = dv = a dt$, por integração em t , obtemos:

$$v(t) = \int v'(t)dt = \int a dt = a \cdot t + K_1.$$

Como $a \cdot t = \Delta v = v - v_0$, da equação acima, concluímos que $K_1 = v_0$. Portanto, temos $v = a \cdot t + v_0$.

Lembrando que $v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$, substituindo na igualdade acima e por integração em t , obtemos

$$s(t) = \int ds = \int v(t)dt = \int (a \cdot t + v_0)dt = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 t + K_2.$$

Lembrando que $v \cdot t = \Delta s = s - s_0$, comparando, concluímos que $K_2 = s_0$. Portanto, temos que $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$.

Exemplo 1.12. Uma pedra é lançada verticalmente para cima de um ponto situado a 45 m acima do solo e com velocidade inicial de 30 m/s. Desprezando a resistência do ar, determine (a) a distância da pedra ao solo após t segundos; (b) o intervalo de tempo durante o qual a pedra sobe; e (c) o instante em que a pedra atinge o solo, e a velocidade nesse instante.

Solução: Primeiramente, notemos que o movimento da pedra pode ser representada por um ponto numa coordenada vertical com origem no solo e direção positiva para cima.

(a) A distância da pedra ao solo no instante t é $s(t)$ e as condições iniciais são $s(0) = 45$ e $v(0) = 30$. Como a velocidade é decrescente, $v'(t) < 0$, isto é, a aceleração é negativa. Logo, pelas observações descritas acima, $a(t) = v'(t) = -9,8$, e então

$$v(t) = \int a(t) dt = \int -9,8 dt = -9,8t + K_1$$

Como $v(0) = 30$, temos que $K_1 = 30$, e conseqüentemente, $v(t) = \int -9,8 dt = -9,8t + 30$. Obtemos agora, $s(t)$ da seguinte forma:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-9,8t + 30) dt = -4,9t^2 + 30t + K_2$$

Como $s(0) = 45$, temos que $K_2 = 45$. E portanto a distância ao solo no instante t é dado por $s(t) = -4,9t^2 + 30t + 45$.

(b) A pedra subirá até que $v(t) = 0$, isto é, $-9,8t + 30 = 0$, ou $t \approx 3$.

(c) A pedra atingirá o solo quando $s(t) = 0$, isto é, quando $-4,9t^2 + 30t + 45 = 0$. Donde $t = -1,24$ ou $t = 7,36$. Como t é não-negativo, temos que quando $t = 7,36$ s a pedra atingirá o solo, sob velocidade $v(7,36) = -9,8(7,36) + 30 \approx -42,13$ m/s.

Exemplo 1.13. Um tanque tem o seu volume de água V , em m^3 , dado em função da altura h da água no mesmo. Sendo conhecido que a taxa de variação de V em relação a h é $\pi(3h - 2)$, e sabendo que quando a altura da água é 1 m, existem no tanque $3\pi m^3$ de água, determine o volume de água no tanque quando a altura for de 3 m.

Solução: A taxa de variação do volume V em relação a h é a derivada $\frac{dV}{dh}$, assim, $\frac{dV}{dh} = \pi(3h - 2)$. Escrevendo $dV = \pi(3h - 2)dh$ e integrando em relação a h , temos

$$V(h) = \int dV = \int \pi(3h - 2)dh = \pi \left(\frac{3h^2}{2} - 2h \right) + K.$$

Para $h = 1$, temos que o volume é $3\pi m^3$, ou seja $V(1) = 3\pi$. Portanto, obtemos

$$3\pi = \pi \left(\frac{3 \cdot 1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) + K \Rightarrow K = \frac{7\pi}{2}.$$

Assim, a expressão do volume em função da altura h é dada por $V(h) = \pi \left(\frac{3h^2}{2} - 2h \right) + \frac{7\pi}{2} = \pi \left(\frac{3h^2}{2} - 2h + \frac{7}{2} \right)$. Logo, para $h = 3$, o volume é:

$$V = \pi \left(\frac{3 \cdot 3^2}{2} - 2 \cdot 3 + \frac{7}{2} \right) = 11\pi m^3.$$

Mudança de Variável na Integral Indefinida: Integração por substituição

As fórmulas para integrais indefinidas que estabelecemos até aqui têm objetivo limitado, por que não podemos usá-la diretamente para calcular integrais como

$$\int \cos(3x) dx, \int \sqrt{4x+1} dx \quad \text{ou} \quad \int \text{tg}(x) dx.$$

Veremos um simples método, mas poderoso, para mudar a variável de integração de modo que essas integrais (e muitas outras) possam ser calculadas por meio de uma integral imediata. Esta técnica de integração decorre da regra da cadeia.

Suponhamos que conhecemos uma primitiva, F , para a função f (isto é, $F' = f$) e que g é uma função derivável. Denotando por h a função composta de F e g , então $h(x) = F(g(x))$ e da fórmula $\int D_x[h(x)] dx = h(x) + K$ temos

$$\int D_x[F(g(x))] dx = F(g(x)) + K.$$

Aplicando a regra da cadeia no integrando $D_x[F(g(x))]$ e do fato que $F' = f$ obtemos

$$D_x[F(g(x))] = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

e portanto

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + K. \tag{1.1}$$

Podemos rememorar a fórmula (1.1) usando o seguinte artifício:

Faça $u = g(x)$. Assim $\frac{du}{dx} = g'(x)$ e logo $du = g'(x)dx$. Então, podemos reescrever (1.1) da seguinte forma:

$$\int f(u) du = F(u) + K,$$

e portanto, se conhecemos uma primitiva da função f , conhecemos também uma primitiva para $(f \circ g) \cdot g'$ que é $F \circ g$.

Este método de calcular integrais indefinidas é conhecido como *Mudança de Variável* ou *Método da Substituição*, e resumimos da seguinte forma.

1.11 Teorema (Regra da Cadeia para Antidiferenciação). Se F é uma antiderivada de f , então

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + K.$$

Se $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, então

$$\int f(u) du = F(u) + K.$$

Exemplo 1.14. Determine as integrais indefinidas exibidas no começo desta seção.

(a) $\int \cos(3x) dx$ (b) $\int \sqrt{4x+1} dx$ (c) (★) $\int \operatorname{tg}(x) dx$

Solução:

(a) Fazendo a substituição $u = 3x$ e $du = 3dx$, temos

$$\int \cos(3x) dx = \int \cos(u) \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(u) + K = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) + K$$

(b) Fazendo a substituição $u = 4x + 1$ e $du = 4dx$, temos

$$\int \sqrt{4x+1} dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{4} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K = \frac{1}{6} u^{\frac{3}{2}} + K = \frac{1}{6} \sqrt{(4x+1)^3} + K$$

(c) Como $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, fazendo a mudança de variável $u = \cos(x)$ e $du = -\operatorname{sen}(x) dx$, temos

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{du}{u} = - \ln |u| + K = - \ln |\cos(x)| + K = \ln |\sec(x)| + K$$

1.12 Observação. Analogamente ao item (c) do exemplo acima, temos que

$$(★) \int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + K$$

De fato, como $\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$, façamos a substituição $u = \operatorname{sen}(x)$ e $du = \cos(x) dx$, logo

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + K = \ln |\operatorname{sen}(x)| + K.$$

1.13 Observação. Nem sempre é fácil decidir a substituição $u = g(x)$ necessária para transformar uma integral indefinida em uma forma que possa ser facilmente calculável. Às vezes é preciso tentar várias possibilidades diferentes até achar uma substituição adequada. Na maioria dos casos, nenhuma substituição simplificará propriamente o integrando. Vejamos algumas diretrizes.

Diretrizes para a substituição da variável:

1. Decidir por uma substituição favorável $u = g(x)$;
2. Calcular $du = g'(x) dx$;
3. Com auxílio de 1. e 2., transformar a integral em uma forma que envolva apenas a variável u . Se qualquer parte do integrando resultante ainda contiver a variável x , usar uma substituição diferente em 1., ou outro método, caso a variável x persista em aparecer;
4. Calcular a integral obtida em 3., obtendo uma antiderivada envolvendo u ;
5. Substituir u por $g(x)$ na antiderivada obtida na diretriz 4. O resultado deve conter apenas a variável x .

Exemplo 1.15. Calcular, com uma mudança de variável, as seguintes integrais (a) $\int xe^{x^2} dx$ e (b) $\int \frac{2x+5}{3x-1} dx$.

Solução:

(a) Fazendo $u = x^2$, temos que $du = 2xdx$ donde $\frac{1}{2}du = xdx$. Daí

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2}e^u + K = \frac{1}{2}e^{x^2} + K.$$

(b) Fazendo $u = 3x - 1$, temos que $du = 3dx$, donde $\frac{1}{3}dx, x = \frac{u+1}{3}$ e $2x + 5 = \frac{2}{3}(u + 1) + 5$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{3x-1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{\frac{2}{3}(u+1) + 5}{u} du + K = \frac{1}{9} \int \frac{2u+17}{u} du + K \\ &= \frac{1}{9} \int 2 du + \frac{1}{9} \int \frac{17}{u} du = \frac{2}{9}u + \frac{17}{9} \ln |u| + K \\ &= \frac{2}{9}(3x-1) + \frac{17}{9} \ln |3x-1| + K. \end{aligned}$$

1.14 Observação. Na verdade, este último exemplo, é um caso particular de uma situação mais geral, que fica como exercício a sua verificação. Sejam a, b, c e d números reais, tal que $c \neq 0$, então

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{a}{c^2}(cx+d) + \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right) \ln |cx+d| + K.$$

1.15 Teorema. Se f é derivável com antiderivada F e se $n \neq -1$ é um número racional, então

(i) $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + K$

(ii) $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + K, a \neq 0$

Prova: Basta fazer a mudança de variável $u = f(x)$ e $du = f'(x)dx$ para (i), e $u = ax + b$ e $\frac{du}{a} = dx$ para (ii).

Exemplo 1.16. Calcule $\int \operatorname{tg}(x) \cdot \sec^2(x) dx$ por dois métodos: (a) substituição $u = \operatorname{tg}(x)$, (b) substituição $u = \sec(x)$, e (c) compare as respostas entre (a) e (b).

Solução:

(a) Fazendo $u = \operatorname{tg}(x)$, temos que $du = \sec^2(x) dx$, logo

$$\int \operatorname{tg}(x) \cdot \sec^2(x) dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + K = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) + K.$$

(b) Fazendo $u = \sec(x)$, temos que $du = \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x) dx$, logo

$$\int \operatorname{tg}(x) \cdot \sec^2(x) dx = \int \sec(x) \cdot \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x) dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + K = \frac{1}{2} \sec^2(x) + K.$$

(c) Como $\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$, as funções definidas por $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x)$ e $\frac{1}{2} \sec^2(x)$ diferem por uma constante, e assim sendo cada uma serve como antiderivada de $\operatorname{tg}(x) \cdot \sec^2(x)$, pois

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sec^2(x) + K &= \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2(x) + 1) + K = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) + \frac{1}{2} + K \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) + K_1, \quad \text{onde} \quad K_1 = \frac{1}{2} + K. \end{aligned}$$

Algumas vezes é possível obter uma primitiva após efetuarmos a mudança de uma variável, mesmo não sendo tão explícito como no Teorema 1.11. Vejamos o seguinte exemplo como ilustração desse fato.

Exemplo 1.17. Calcule $\int x^2 \sqrt{1+x} dx$.

Solução:

1ª Forma. Fazendo $u = 1 + x$, temos que $du = dx$ e $x = u - 1$. Assim temos

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1+x} dx &= \int (u-1)^2 u^{\frac{1}{2}} du = \int u^{\frac{5}{2}} du - 2 \int u^{\frac{3}{2}} du + \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 2 \cdot \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K = \frac{2}{7} (1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} (1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} + K. \end{aligned}$$

2ª Forma. Fazendo $v = \sqrt{1+x}$, temos que $v^2 - 1 = x$ e $2v dv = dx$. Então

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1+x} dx &= \int (v^2 - 1)^2 \cdot v \cdot 2v dv = 2 \int v^6 dv - 4 \int v^4 dv + 2 \int v^2 dv \\ &= \frac{2}{7} v^7 - \frac{4}{5} v^5 + \frac{2}{3} v^3 + K = \frac{2}{7} (1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} (1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} + K. \end{aligned}$$

Exemplo 1.18 (★). Obter fórmulas para (a) $\int \sec(x) dx$ e (b) $\int \operatorname{cosec}(x) dx$.

Solução:

(a) Multiplicando o numerador e o denominador por $\sec(x) + \operatorname{tg}(x)$, temos

$$\int \sec(x) dx = \int \frac{\sec(x)(\sec(x) + \operatorname{tg}(x))}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx$$

e mudando de variável, $u = \sec(x) + \operatorname{tg}(x)$, temos $du = (\sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x) + \sec^2(x))dx$ obtém-se

$$\begin{aligned} \int \sec(x) dx &= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + K \\ &= \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + K \end{aligned}$$

(b) Multiplicando o numerador e o denominador por $\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotg}(x)$, temos

$$\int \operatorname{cosec}(x) dx = \int \frac{\operatorname{cosec}(x)(\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotg}(x))}{\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotg}(x)} dx = \int \frac{\operatorname{cosec}^2(x) - \operatorname{cosec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x)}{\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotg}(x)} dx$$

e mudando de variável, $u = \operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotg}(x)$, temos $du = (-\operatorname{cosec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x) + \operatorname{cosec}^2(x))dx$ obtém-se

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec}(x) dx &= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + K \\ &= \ln |\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotg}(x)| + K \end{aligned}$$

Nota 2. Escrevendo $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{1 - \operatorname{sen}^2(x)}$, podemos mudar a variável $u = \operatorname{sen}(x)$, donde $du = \cos(x)dx$ e, então, integramos a secante de outra maneira:

$$\int \sec(x) dx = \int \frac{\cos(x)}{1 - \operatorname{sen}^2(x)} dx = \int \frac{1}{1 - u^2} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + K = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)} \right| + K.$$

Agora, percebemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)} \right| &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \operatorname{sen}(x))(1 + \operatorname{sen}(x))}{(1 - \operatorname{sen}(x))(1 + \operatorname{sen}(x))} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \operatorname{sen}(x))^2}{\cos^2(x)} \right| \\ &= \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \right| = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)|. \end{aligned}$$

Exemplo 1.19 (★). Mostre, por uma mudança de variável, que:

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) + K;$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + K;$

(b) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + K;$

(e) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + K;$

(c) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left(\frac{x}{a} \right) + K;$

(f) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x + a}{x - a} \right| + K.$

Solução:

(a) Notemos primeiro que $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx.$

Fazendo $u = \frac{x}{a}$, temos que $adu = dx$ e logo

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{a}{\sqrt{1 - u^2}} du = \arcsen(u) + K = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + K.$$

(b) Como $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \int \frac{1}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx$, pondo $u = \frac{x}{a}$, temos que $a \cdot du = dx$ e logo

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{1 + u^2} du = \frac{1}{a} \arctg(u) + K = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{x}{a}\right) + K.$$

(c) Como $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \frac{1}{x\sqrt{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}}$, pela mudança de variável $u = \frac{x}{a}$,

temos $x = a \cdot u$ donde $dx = a \cdot du$, e logo

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{a}{au\sqrt{u^2 - 1}} du = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}(u) + K = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + K.$$

(d) Como $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$, fazendo $u = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$, temos:

$$du = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) dx = \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx,$$

portanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + K = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + K.$$

(e) Como $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{1}{(x+a)(x-a)} dx = \int \frac{1}{(x+a)^2 \frac{(x-a)}{(x+a)}} dx$, fazendo $u = \frac{x-a}{x+a}$ e pela regra da

derivada do quociente, temos que

$$du = \frac{1 \cdot (x+a) - 1 \cdot (x-a)}{(x+a)^2} dx = \frac{2a}{(x+a)^2} dx, \quad \text{donde,} \quad \frac{du}{2a} = \frac{dx}{(x+a)^2}$$

e portanto

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{1}{u} \frac{du}{2a} = \frac{1}{2a} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2a} \ln|u| + K = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + K.$$

(f) Idem (e).

1.2 Técnicas de Integração

Até aqui, estabelecemos fórmulas para o cálculo de integrais indefinidas a partir da fórmula

$$\int D_x[f(x)] dx = f(x) + K$$

e pelo método da substituição de variável, que possibilita transformar uma integral em outra mais simples, que possa ser facilmente calculada.

Desenvolveremos então, outras maneiras de simplificar integrais, entre elas a integração por partes. Este poderoso dispositivo permite-nos obter integrais indefinidas de $\ln(x)$, $\arctg(x)$ e outras expressões transcendentais importantes. Desenvolveremos ainda, técnicas para simplificar integrais que contenham: potência de funções trigonométricas; radicais; expressões racionais e $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Às vezes pode ser preferível fazer uso de uma tabela de integrais, em vez de efetuar uma integração complicada. Tabelas desse tipo pode-se encontrar em quase todos os livros de cálculo. Algumas vezes é necessário empregar técnica de integração para expressar o integrando na forma em que ele aparece na tabela, exigindo que reconheça qual técnica a ser empregada numa dada integral. Quase todas as fórmulas nas tabelas de integrais, são desenvolvidas a partir das técnicas de integração, por essa razão, aconselhamos o uso das tabelas de integrais somente depois que você dominar a integração.

Na prática, não é sempre possível calcular uma integral indefinida, isto é, o integrando não tem uma antiderivada que possa ser expressa em termos das funções elementares. Exemplos de tais integrais são

$$\int e^{-x^2} dx \text{ e } \int \frac{\text{sen}(x)}{x} dx.$$

1.2.1 Integração por Partes

Da fórmula da derivada do produto de duas funções obtemos um método de integração muito útil, chamado *Integração por Partes*, que é estabelecido da seguinte forma.

Se f e g são duas funções diferenciáveis, então

$$D_x[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

ou equivalentemente

$$f(x) \cdot g'(x) = D_x[f(x) \cdot g(x)] - f'(x) \cdot g(x).$$

Integrando ambos os membros em relação a x , obtemos

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = \int D_x[f(x) \cdot g(x)] dx - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

e escrevemos esta última equação da seguinte forma:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx \tag{1.2}$$

que é chamada de fórmula de *Integração por Partes*. Esta fórmula pode ser simplificada fazendo

$$\begin{aligned} u &= f(x) & dv &= g'(x)dx \\ du &= f'(x)dx & v &= g(x) \end{aligned}$$

resultando na seguinte versão da fórmula de integração por partes

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du \tag{1.3}$$

Observe, que esta fórmula nos permite expressar uma integral indefinida em termos de outra que pode ser mais fácil de calcular, escolhendo adequadamente u e dv . O termo por partes é do fato que este processo separa o integrando em duas partes. É importante a escolha adequada de dv , que em geral fazemos representar a parte mais complicada do integrando que possa ser prontamente integrada, pois v será uma primitiva de dv .

Resumimos este processo de integração da seguinte forma:

Olhamos uma função h que queremos integrar, como o produto de duas funções, uma das quais é a derivada de uma função já conhecida, isto é,

$$h(x) = f(x) \cdot g'(x),$$

com g sendo uma função conhecida. Como vimos, temos que

$$\int h(x) \, dx = \int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \, dx.$$

Esperamos, então, que nossa escolha para as funções f e g tenham sido boa de maneira que conheçamos uma primitiva para $g \cdot f'$.

Usando novas variáveis, u e v , podemos representar a igualdade acima de uma forma mais simples: fazendo

$$\begin{aligned} u &= f(x) & dv &= g'(x)dx \\ du &= f'(x)dx & v &= g(x) \end{aligned}$$

e, portanto, nessas novas variáveis, a fórmula que obtivemos acima,

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \, dx$$

se reduz a resultando na seguinte versão da fórmula de integração por partes

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du.$$

A seguir, exemplos ilustrando este método de integração.

Exemplo 1.20. Calcular $\int x \ln(x) \, dx$.

Solução: Para determinar quais as substituições para u e dv , devemos ter em mente que para encontrar v precisamos saber integrar dv . Isso sugere que $u = \ln(x)$ e $dv = x \, dx$. Então,

$$du = \frac{1}{x} \, dx \quad \text{e} \quad v = \frac{x^2}{2} + K_1.$$

Da fórmula (1.3), temos:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln(x) \, dx &= \ln(x) \left(\frac{x^2}{2} + K_1 \right) - \int \left(\frac{x^2}{2} + K_1 \right) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x) + K_1 \ln(x) - \frac{1}{2} \int x \, dx - K_1 \int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x) + K_1 \ln(x) - \frac{x^2}{4} - K_1 \ln(x) + K_2 \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + K_2. \end{aligned}$$

1.16 Observação. Neste último exemplo, note que a primeira constante de integração K_1 , não aparece na resposta final. K_1 foi usada somente para mostrar que todas as escolhas de v da forma $\frac{1}{2}x^2 + K_1$ produzem o mesmo resultado para $\int x \ln(x) dx$. Essa situação vale em geral e provamos isso da seguinte forma: Escrevendo $v + K_1$ na fórmula (1.3), temos

$$\begin{aligned} \int u dv &= u(v + K_1) - \int (v + K_1) du \\ &= uv + K_1u - \int v du - K_1 \int du \\ &= uv + K_1u - \int v du - K_1u \\ &= uv - \int v du. \end{aligned}$$

Assim sendo, é desnecessário escrevermos a constante de integração quando calculamos v a partir de dv .

Exemplo 1.21. Calcular $\int x^3 e^{x^2} dx$.

Solução: Usando integração por partes, com $u = x^2$ e $dv = xe^{x^2}$, temos então que

$$du = 2x dx \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

em que v foi obtido pelo método de mudança de variável. Da fórmula (1.3) temos

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= x^2 \left(\frac{1}{2}e^{x^2} \right) - \int \left(\frac{1}{2}e^{x^2} \right) 2x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + K. \end{aligned}$$

Exemplo 1.22. Pelo método de integração por partes, calcule as seguintes integrais.

(a) $\int x \cdot \cos(x) dx$ (b) $\int (x^2 + 3x) \cdot \text{sen}(x) dx$.

Solução:

(a) Seja $u = x$ e $dv = \cos(x) dx$. Então $du = dx$ e $v = \text{sen}(x)$. Pela fórmula (1.3)

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos(x) dx &= x \cdot \text{sen}(x) - \int \text{sen}(x) dx \\ &= x \cdot \text{sen}(x) + \cos(x) + K. \end{aligned}$$

(b) Fazendo $u = x^2 + 3x$ e $dv = \text{sen}(x) dx$, temos $du = (2x + 3)dx$ e $v = -\cos(x)$. Portanto, pela fórmula (1.3), temos

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x) \cdot \text{sen}(x) dx &= -(x^2 + 3x) \cdot \cos(x) - \int (-\cos(x))(2x + 3) dx \\ &= -(x^2 + 3x) \cdot \cos(x) + \int (2x + 3) \cdot \cos(x) dx. \end{aligned}$$

A integral do segundo membro é semelhante à primeira integral, exceto que em vez de $\text{sen}(x)$ temos

$\cos(x)$. Aplicando a integração por partes novamente, sendo

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 2x + 3 & d\bar{v} &= \cos(x)dx \\ d\bar{u} &= 2dx & \bar{v} &= \sin(x) \end{aligned}$$

teremos

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x) \cdot \sin(x) dx &= -(x^2 + 3x) \cos(x) + \left((2x + 3) \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x) dx \right) \\ &= -(x^2 + 3x) \cdot \cos(x) + (2x + 3) \sin(x) + 2 \cos(x) dx + K \\ &= -(x^2 + 3x - 2) \cdot \cos(x) + (2x + 3) \cdot \sin(x) + K. \end{aligned}$$

1.17 Observação. De modo geral, as integrais

$$\int f(x) \cdot \cos(x) dx \quad \text{ou} \quad \int f(x) \cdot \sin(x) dx$$

onde $f(x)$ é um polinômio, usamos a integração por partes, tomando

$$\left\{ \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x)dx \end{array} \right. \quad dv = \cos(x) dx \quad v = \sin(x) \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x)dx \end{array} \right. \quad dv = \sin(x) dx \quad v = -\cos(x)$$

Exemplo 1.23. Pelo método de integração por partes, calcule as seguintes integrais.

(a) $\int x \cdot e^x dx$ (b) $\int 2x \cdot \ln(x) dx$.

Solução:

(a)

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \right. \quad dv = e^x dx \quad v = e^x \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx \\ = x \cdot e^x - e^x + K \\ = (x - 1) \cdot e^x + K. \end{array} \right.$$

(b)

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right. \quad dv = 2x dx \quad v = x^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \int 2x \cdot \ln(x) dx = x^2 \cdot \ln(x) - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ = x^2 \cdot \ln(x) - \int x dx \\ = x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2} + K. \end{array} \right.$$

1.18 Observação. De modo geral, nas integrais da forma

$$\int f(x) \cdot a^x dx \quad \text{ou} \quad \int f(x) \cdot \log_a(x) dx$$

onde $f(x)$ é um polinômio e a é uma constante, usamos integração por partes, fazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x)dx \end{array} \right. \quad dv = a^x dx \quad v = \frac{a^x}{\ln(a)} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \log_a(x) \\ du = \frac{1}{x \cdot \ln a} dx \end{array} \right. \quad dv = f(x) dx \quad v = \text{primitiva de } f(x)$$

Exemplo 1.24 (★). Mostre pelo método de integração por partes as seguintes fórmulas:

$$(a) \int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + K$$

$$(b) \int \arctg(x) dx = x \cdot \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + K$$

$$(c) \int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \operatorname{sen}(bx) + a \cos(bx)) + K$$

$$(d) \int e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen}(bx) - b \cos(bx)) + K$$

Solução:

(a) Aplicando o método integração por partes, escrevemos:

$$\begin{aligned} u &= \ln(x) & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= x \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln(x) - \int dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + K. \end{aligned}$$

(b) Novamente, pelo método de integração por partes, temos:

$$\begin{aligned} u &= \arctg(x) & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2} dx & v &= x \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \int \arctg(x) dx &= x \cdot \arctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \cdot \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K, \end{aligned}$$

em que $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ foi obtida pela mudança de variável $u = 1 + x^2$ e $du = 2x dx$.

(c) Pela integração por partes, tem-se

$$\begin{aligned} u &= e^{ax} & dv &= \cos(bx) dx \\ du &= ae^{ax} dx & v &= \frac{1}{b} \operatorname{sen}(bx) \end{aligned}$$

onde

$$\int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx = \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx) dx.$$

Note que no segundo membro temos uma integral semelhante, exceto em vez de $\cos(bx)$ temos $\operatorname{sen}(bx)$.

Então, aplicando novamente o método de integração por partes, para esta integral temos

$$\begin{aligned} \bar{u} &= e^{ax} & d\bar{v} &= \operatorname{sen}(bx) dx \\ d\bar{u} &= ae^{ax} dx & \bar{v} &= -\frac{1}{b} \cos(bx) \end{aligned}$$

onde

$$\int e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx) dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cdot \cos(bx) + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx.$$

Substituindo essa expressão na igualdade precedente, temos:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \text{sen}(bx) - \frac{a}{b} \left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cdot \cos(bx) + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx \right) \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \text{sen}(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cdot \cos(bx) - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx \end{aligned}$$

Levando ao primeiro membro a integral do segundo membro, obtemos a seguinte igualdade:

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx = e^{ax} \left(\frac{1}{b} \text{sen}(bx) + \frac{a}{b^2} \cos(bx) \right) + K$$

e portanto, temos que

$$\int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(b \text{sen}(bx) + a \cos(bx) \right) + K.$$

(d) Obtém-se de modo análogo ao item (c).

Exemplo 1.25 (★ Integração de Potência de Funções Trigonômétricas: Fórmula de Redução). A integração por partes pode às vezes ser usada para obter fórmulas de redução para integrais. Utilizamos tais fórmulas para escrever uma integral que envolve potências de uma expressão, em termos de integrais que envolvem potências inferiores da mesma expressão. Veremos como estabelecer uma fórmula de redução para as integrais de potências de funções trigonométricas, dos tipos:

$$\int \text{sen}^n(x) dx, \int \cos^n(x) dx, \int \text{tg}^n(x) dx, \int \text{cotg}^n(x) dx, \int \sec^n(x) dx, \int \text{cosec}^n(x) dx$$

que são:

$$(a) \int \text{sen}^n(x) dx = -\frac{1}{n} \cos(x) \cdot \text{sen}^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \text{sen}^{n-2}(x) dx$$

$$(b) \int \cos^n(x) dx = \frac{1}{n} \text{sen}(x) \cdot \cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx$$

$$(c) \int \text{tg}^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \text{tg}^{n-1}(x) - \int \text{tg}^{n-2}(x) dx$$

$$(d) \int \text{cotg}^n(x) dx = -\frac{1}{n-1} \text{cotg}^{n-1} x - \int \text{cotg}^{n-2}(x) dx$$

$$(e) \int \sec^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2}(x) \cdot \text{tg}(x) + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) dx$$

$$(f) \int \text{cosec}^n(x) dx = -\frac{1}{n-1} \text{cosec}^{n-2}(x) \cdot \text{cotg}(x) + \frac{n-2}{n-1} \int \text{cosec}^{n-2}(x) dx$$

Solução: Detalharemos somente o item (a), uma vez que os demais são análogos.

(a) Pela integração por partes, fazemos

$$\begin{aligned} u &= \text{sen}^{n-1}(x) & dv &= \text{sen}(x) dx \\ du &= (n-1) \text{sen}^{n-2}(x) \cdot \cos(x) dx & v &= -\cos(x) \end{aligned}$$

e integrando, temos

$$\int \text{sen}^n x dx = -\cos(x) \cdot \text{sen}^{n-1}(x) + (n-1) \int \text{sen}^{n-2}(x) \cdot \cos^2(x) dx$$

como $\cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x)$, escrevemos

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^n x \, dx &= -\cos(x) \cdot \text{sen}^{n-1}(x) + (n-1) \int \text{sen}^{n-2}(x) \cdot (1 - \text{sen}^2(x)) \, dx \\ &= -\cos(x) \cdot \text{sen}^{n-1}(x) + (n-1) \int \text{sen}^{n-2}(x) \, dx - (n-1) \int \text{sen}^n(x) \, dx, \end{aligned}$$

conseqüentemente

$$\int \text{sen}^n(x) \, dx + (n-1) \int \text{sen}^n(x) \, dx = -\cos(x) \cdot \text{sen}^{n-1}(x) + (n-1) \int \text{sen}^{n-2}(x) \, dx$$

onde o membro esquerdo se reduz a $n \int \text{sen}^n(x) \, dx$, e dividindo ambos os membros por n , obtemos

$$\int \text{sen}^n(x) \, dx = -\frac{1}{n} \cos(x) \cdot \text{sen}^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \text{sen}^{n-2}(x) \, dx. \tag{1.4}$$

É evidente que, mediante aplicações reiteradas da fórmula (1.4), calculamos $\int \text{sen}^n(x) \, dx$ para qualquer inteiro positivo n , pois essas reduções sucessivas terminam em $\int \text{sen}(x) \, dx$ ou $\int dx$, ambas imediatamente integráveis.

Exemplo 1.26. Use uma das fórmulas de redução apresentadas no exemplo anterior, para determinar a integral $\int \text{sen}^4(x) \, dx$.

Solução: Usaremos a fórmula dada no item (a), com $n = 4$. Assim

$$\int \text{sen}^4(x) \, dx = -\frac{1}{4} \cos(x) \cdot \text{sen}^3(x) + \frac{3}{4} \int \text{sen}^2(x) \, dx.$$

Aplicando a fórmula (1.4), com $n = 2$, para a integral à direita, temos

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2(x) \, dx &= -\frac{1}{2} \cos(x) \cdot \text{sen}(x) + \frac{1}{2} \int dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos(x) \cdot \text{sen}(x) + \frac{1}{2}x + K, \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^4 x \, dx &= -\frac{1}{4} \cos(x) \cdot \text{sen}^3(x) + \frac{3}{4} \int \text{sen}^2(x) \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \cos(x) \cdot \text{sen}^3(x) + \frac{3}{4} \left[-\frac{1}{2} \cos(x) \cdot \text{sen}(x) + \frac{1}{2}x + K \right] \\ &= -\frac{1}{4} \cos(x) \cdot \text{sen}^3(x) - \frac{3}{8} \cos(x) \cdot \text{sen}(x) + \frac{3}{8}x + K_1 \end{aligned}$$

onde $K_1 = \frac{3}{4}K$.

1.19 Observação. Mais adiante, com auxílio das identidades trigonométricas fundamentais, desenvolveremos outro método para integrais envolvendo potências de funções trigonométricas, de uma forma mais geral, como por exemplo $\int \cos^n(x) \cdot \text{sen}^m(x) \, dx$, onde n e m são inteiros quaisquer.

1.2.2 *Integrais do tipo:* $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ e $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

Faremos a discussão em 4 casos, que são:

- Caso 1. $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ Caso 3. $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$
 Caso 2. $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ Caso 4. $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

Caso 1. $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$

Transformamos, primeiramente, o denominador pondo-o sob a forma de uma soma ou de uma diferença de quadrados, completando quadrado, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right], \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

Temos que $4a^2$ é sempre maior do que zero, no entanto precisamos olhar para $\Delta = b^2 - 4ac$. Então

(i) Se $\Delta < 0$, então $-\Delta > 0$, fazendo $k^2 = -\frac{\Delta}{4a^2}$ temos

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right]} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2} dx.$$

Pela mudança de variável $u = x + \frac{b}{2a}$ e $du = dx$, e pelo Exemplo (★) 1.19(b) temos

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2 + k^2} du = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{k} \cdot \text{arctg} \left(\frac{u}{k} \right) + C.$$

(ii) Se $\Delta > 0$, então $-\Delta < 0$, fazendo $k^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ temos

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - k^2 \right]} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - k^2} dx.$$

Pela mudança de variável $u = x + \frac{b}{2a}$ e $du = dx$, e pelo Exemplo (★) 1.19(e) temos

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2 - k^2} du = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2k} \cdot \ln \left| \frac{u - k}{u + k} \right| + C.$$

(iii) Se $\Delta = 0$, então

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} dx,$$

e pela mudança de variável $u = x + \frac{b}{2a}$ e $du = dx$, temos

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{au} + C.$$

Exemplo 1.27. Calcular $\int \frac{1}{2x^2 + 8x + 20} dx$.

Solução: Notemos primeiramente que $2x^2 + 8x + 20 = 2(x^2 + 4x + 10)$. Assim

$$x^2 + 4x + 10 = (x^2 + 4x + 4) + 10 - 4 = (x + 2)^2 + 6,$$

e então

$$\int \frac{1}{2x^2 + 8x + 20} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 6} dx.$$

Pela mudança de variável $u = x + 2$ e $du = dx$ temos

$$\int \frac{1}{2x^2 + 8x + 20} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 6} du = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{\sqrt{6}} \right) + K = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + 2}{\sqrt{6}} \right) + K.$$

Caso 2. $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$

Como

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = A \int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx + B \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

precisamos calcular apenas a primeira integral do lado direito, visto que, acabamos de resolver integral do tipo da segunda.

Observe, que se $u = ax^2 + bx + c$ então $du = (2ax + b)dx$. Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx &= \frac{1}{2a} \int \frac{2ax + b - b}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{1}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx. \end{aligned}$$

A primeira integral do segundo membro, é facilmente calculada pela mudança de variável $u = ax^2 + bx + c$ e $du = (2ax + b)dx$, deste modo

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + K_1 = \ln |ax^2 + bx + c| + K_1.$$

Voltando à integral precedente, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx &= A \int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx + B \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{A}{2a} \left[\ln |ax^2 + bx + c| + K_1 - b \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \right] + B \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + K, \end{aligned}$$

em que, $K = \frac{A}{2a}K_1$.

Exemplo 1.28. Calcule a seguinte integral $\int \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 5} dx$.

Solução: Como

$$\int \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 5} dx = \int \frac{x}{x^2 - 2x - 5} dx + 3 \int \frac{1}{x^2 - 2x - 5} dx,$$

resolvendo a primeira integral do lado direito, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 2x - 5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 2}{x^2 - 2x - 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 5} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2}{x^2 - 2x - 5} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 5| + \int \frac{1}{x^2 - 2x - 5} dx + K_1. \end{aligned}$$

Agora, como

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x - 5} dx = \int \frac{1}{(x^2 - 2x + 1) - 1 - 5} dx = \int \frac{1}{(x - 1)^2 - 6} dx = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(x - 1) - \sqrt{6}}{(x - 1) + \sqrt{6}} \right| + K_2,$$

temos finalmente

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 5} dx &= \int \frac{x}{x^2 - 2x - 5} dx + 3 \int \frac{1}{x^2 - 2x - 5} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 5| + K_1 + 4 \int \frac{1}{x^2 - 2x - 5} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 5| + K_1 + \frac{4}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(x - 1) - \sqrt{6}}{(x - 1) + \sqrt{6}} \right| + 4K_2 \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 5| + \frac{\sqrt{6}}{3} \ln \left| \frac{x - (1 + \sqrt{6})}{x - 1 + \sqrt{6}} \right| + K, \end{aligned}$$

em que $K = K_1 + 4K_2$.

Caso 3. $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

Com ajuda da mudança de variável indicada no Caso 1, essa integral reduz a uma integral do tipo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} du, \text{ se } a > 0 \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{\sqrt{k^2 - u^2}} du, \text{ se } a < 0$$

que são facilmente calculadas com auxílio das fórmulas dadas no Exemplo(★) 1.19(a) e (d).

Exemplo 1.29. Calcule a seguinte integral $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2(x) + 2\ln(x) + 5}} dx$.

Solução: Pela mudança de variável $u = \ln(x)$ e $du = \frac{dx}{x}$, temos

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2(x) + 2\ln(x) + 5}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 2u + 5}} du = \int \frac{1}{\sqrt{(u + 1)^2 + 4}} du.$$

Novamente, mudando variável, agora, $t = u + 1$ e $dt = du$, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{(u + 1)^2 + 4}} du &= \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} dt = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 4} \right| + K = \ln \left| (u + 1) + \sqrt{(u + 1)^2 + 4} \right| + K \\ &= \ln \left| \ln(x) + 1 + \sqrt{(\ln(x) + 1)^2 + 4} \right| + K. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2(x) + 2\ln(x) + 5}} dx = \ln \left| \ln(x) + 1 + \sqrt{(\ln(x) + 1)^2 + 4} \right| + K$$

Caso 4. $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

Calculamos integrais deste tipo, usando transformações análogas às consideradas no Caso 2, pois:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = A \int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + B \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

onde que a segunda integral do lado direito é justamente do caso imediatamente anterior a este. Então

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \frac{1}{2a} \int \frac{2ax + b - b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \\ &= \frac{1}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \end{aligned}$$

e assim,

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{b}{2a} \right) \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Com a mudança de variável $u = ax^2 + bx + c$ e $du = (2ax + b)dx$, calculamos

$$\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + K_1 = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + K_1.$$

Portanto,

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{b}{2a} \right) \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + K,$$

em que $K = \frac{A}{a}K_1$.

Exemplo 1.30. Calcule $\int \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{2 + \cos(x) - \cos^2(x)}} dx$.

Solução: Inicialmente, pela seguinte mudança de variável $u = \cos(x)$ e $du = -\text{sen}(x) dx$, e do fato que $\text{sen}(2x) = 2 \text{sen}(x) \cos(x)$, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{2 + \cos(x) - \cos^2(x)}} dx &= \int \frac{-2u}{\sqrt{2 + u - u^2}} du = \int \frac{-2u + 1 - 1}{\sqrt{2 + u - u^2}} du \\ &= \int \frac{-2u + 1}{\sqrt{2 + u - u^2}} du - \int \frac{1}{\sqrt{2 + u - u^2}} du. \end{aligned}$$

Para a primeira integral do lado direito, fazemos $t = 2 + u - u^2$ e $dt = (-2u + 1)du$, onde que

$$\begin{aligned} \int \frac{-2u + 1}{\sqrt{2 + u - u^2}} du &= \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} + K_1 = 2\sqrt{2 + u - u^2} + K_1 \\ &= 2\sqrt{2 + \cos(x) - \cos^2(x)} + K_1. \end{aligned}$$

Para a segunda integral, escrevemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2 + u - u^2}} du &= \int \frac{1}{\sqrt{-(u^2 - u - 2)}} du = \int \frac{1}{\sqrt{-(u^2 - u + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2)}} du \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{-\left[\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]}} du = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2}} du, \end{aligned}$$

fazendo $v = u - \frac{1}{2}$ e $dv = du$, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2+u-u^2}} du &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-v^2}} dv = \arcsen\left(\frac{v}{3/2}\right) + K_2 \\ &= \arcsen\left(\frac{2}{3}v\right) + K_2 = \arcsen\left(\frac{2}{3}\left(u - \frac{1}{2}\right)\right) + K_2 \\ &= \arcsen\left(\frac{2\cos(x)-1}{3}\right) + K_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2+\cos(x)-\cos^2(x)}} dx &= \int \frac{-2u+1}{\sqrt{2+u-u^2}} du - \int \frac{1}{\sqrt{2+u-u^2}} du \\ &= 2\sqrt{2+\cos(x)-\cos^2(x)} + K - \arcsen\left(\frac{2\cos(x)-1}{3}\right) + K, \end{aligned}$$

em que $K = K_1 - K_2$.

1.2.3 Integrais de Funções Racionais

1.20 Definição. Uma *função racional* é uma função da forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em que $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais e $q(x) \neq 0$ para todo x . As funções racionais podem ser classificadas em próprias ou impróprias. Dizemos que uma função racional f é *própria* se $\text{gr}(p) < \text{gr}(q)$, caso contrário, isto é, se $\text{gr}(p) \geq \text{gr}(q)$ dizemos que f é *imprópria*.

Exemplo 1.31.

(a) São funções racionais próprias: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^3 - 3x^2 + x - 1}$ e $g(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 1}$.

(b) São funções racionais impróprias: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x - 3x^2}$ e $g(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1}$.

Integrais de Funções Racionais Impróprias

Seja $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional imprópria. Assim, temos que $\text{gr}(p) \geq \text{gr}(q)$, e então podemos dividir $p(x)$ por $q(x)$ e obtermos um quociente $Q(x)$ e um resto $R(x)$, em que $\text{gr}(R) < \text{gr}(q)$. Em símbolos, escrevemos:

$$p(x) = q(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Desta forma, procedemos da seguinte forma para o cálculo da integral:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{q(x) \cdot Q(x) + R(x)}{q(x)} dx = \int \frac{q(x) \cdot Q(x)}{q(x)} + \int \frac{R(x)}{q(x)} dx \\ &= \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{q(x)} dx \end{aligned}$$

Como $\text{gr}(R) < \text{gr}(q)$, observemos o seguinte:

1.21 Observação. Para o cálculo da integral de uma função racional imprópria, dividindo-se o numerador pelo denominador, escreve-se a função como soma de uma função polinomial e uma função racional própria.

Exemplo 1.32. Calcule $\int \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

Solução: Para obter a integral da função $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$, dividimos os polinômios $p(x) = 2x^2 + 2x + 1$ e $q(x) = x^2 + 1$, e escrevemos

$$p(x) = 2x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 + 1) + 2x - 1.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{2(x^2 + 1) + 2x - 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + dx \int \frac{2x - 1}{x^2 + 1} dx \\ &= \int 2dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= 2x + \ln(x^2 + 1) - \operatorname{arctg}(x) + K. \end{aligned}$$

Vimos assim, que o cálculo da integral de funções racionais resume-se em obter integrais para funções racionais próprias.

Integrais de Funções Racionais Próprias: Método da Decomposição em Frações Parciais

O *Método da Decomposição em Frações Parciais* consiste em escrever uma função racional própria como soma de frações parciais que dependem, principalmente, da fatoração do denominador da função racional em \mathbb{R} .

Seja $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional própria, isto é, $\operatorname{gr}(p) < \operatorname{gr}(q)$, então

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = F_1 + F_2 + \dots + F_r$$

em que cada F_k ($k = 1, \dots, r$) tem uma das formas $\frac{A}{(ax + b)^n}$ ou $\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$.

A soma $F_1 + F_2 + \dots + F_r$ é a *decomposição em frações parciais* de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ e F_k é uma fração parcial.

Exemplo 1.33. Se $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ podemos expressar $\frac{2}{x^2 - 1}$ como $\frac{2}{(x + 1)(x - 1)}$, ou ainda $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$. A última expressão é a decomposição em frações parciais de $\frac{2}{x^2 - 1}$.

Desta forma, para obter $\int \frac{2}{x^2 - 1} dx$, integramos cada uma das frações que constituem a decomposição, obtendo

$$\int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{1}{x + 1} dx = \ln|x - 1| - \ln|x + 1| + K = \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + K.$$

Nota 3. Afirmamos que toda função racional possui uma decomposição em frações parciais. Uma demonstração deste fato, encontra-se no capítulo II do livro “Álgebra: Um Curso de Introdução” de Arnaldo Garcia e Yves Lequain, publicado pelo IMPA.

Diretrizes para a Decomposição em Frações Parciais

Seja $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional própria. Veremos quatro casos, nos dois primeiros, $q(x)$ é decomposta em fatores lineares; e nos dois últimos, $q(x)$ é decomposta em fatores lineares e quadráticos.

(1) Os fatores de $q(x)$ são **todos lineares** e **nenhum repetido**, isto é,

$$q(x) = (a_1x + b_1) \cdot (a_2x + b_2) \cdot \dots \cdot (a_nx + b_n)$$

em que não há fatores idênticos. Neste caso escrevemos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx + b_n},$$

em que A_1, A_2, \dots, A_n são constantes reais a serem determinadas.

Exemplo 1.34. Seja $f(x) = \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x}$, calcular $\int f(x)dx$.

Solução: Fatorando o denominador temos que $f(x) = \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)}$. Desta forma,

$$\frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 1},$$

equivalentemente a $x - 1 = A(x - 2)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 2)$. Agora, eliminando os parênteses no segundo membro e agrupando os termos de mesmo grau, obtemos:

$$x - 1 = (A + B + C)x^2 + (-A + B - 2C)x - 2A$$

Temos assim, uma identidade de polinômios na variável x e sabemos que, para que isto ocorra, os coeficientes dos termos de mesmo grau nos dois membros devem ser iguais. Daí, temos o seguinte sistema nas incógnitas

A, B e C :

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -A + B - 2C = 1 \\ -2A = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{6}$ e $C = -\frac{2}{3}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx &= \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{6(x - 2)} - \frac{2}{3(x + 1)} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x - 2} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{6} \ln |x - 2| - \frac{2}{3} \ln |x + 1| + K = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^3(x - 2)}{(x + 1)^4} \right| + K. \end{aligned}$$

1.22 Observação. Uma outra maneira de determinar as constantes A, B e C é, substituindo na identidade $x - 1 = A(x - 2)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 2)$, valores convenientes para x (neste caso, escolheríamos $x = 0, x = 2$ e $x = -1$), já que uma identidade é verdadeira para quaisquer valores de x para os quais ela exista. *Verifique!*

Exemplo 1.35. Integrando por frações parciais, mostre que

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + K.$$

Solução: Escrevendo a fração do integrando como soma de frações parciais, temos:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}.$$

Ou ainda, temos $1 = A(x + a) + B(x - a) = (A + B)x + Aa - Ba$. Da igualdade entre polinômios, temos o seguinte sistema, nas incógnitas A e B :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Aa - Ba = 1 \end{cases}$$

donde, $a = \frac{1}{2a}$ e $B = -\frac{1}{2a}$. Portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \int \frac{A}{x - a} dx + \int \frac{B}{x + a} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x - a} dx - \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x + a} dx \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + K. \end{aligned}$$

1.23 Observação. Analogamente, mostra-se que

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x + a}{x - a} \right| + K.$$

(2) Os fatores de $q(x)$ são **todos lineares** e **alguns repetidos**. Suponha que $(a_i x + b_i)$ seja um fator repetido que se repete p vezes. Então, correspondendo a esse fator haverá a soma de p frações parciais

$$\frac{A_1}{a_i x + b_i} + \frac{A_2}{(a_i x + b_i)^2} + \dots + \frac{A_{p-1}}{(a_i x + b_i)^{p-1}} + \frac{A_p}{(a_i x + b_i)^p}$$

em que A_1, A_2, \dots, A_p são constantes reais a serem determinadas.

Exemplo 1.36. Calcular a integral indefinida $\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx$.

Solução: Fatorando o denominador, obtemos $x^4 - 4x^2 = x^2(x + 2)(x - 2)$, de onde temos que -2 e 2 são raízes simples e 0 é raiz dupla deste polinômio. Assim, na decomposição do integrando em frações parciais, corresponderá a este fator uma soma de 2 frações parciais, com denominador x , com expoentes variando de 1 a 2. Deste modo, escrevemos integrando como segue:

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 2}.$$

Eliminando os denominadores temos

$$x^3 + 3x - 1 = A_1 x(x + 2)(x - 2) + A_2(x + 2)(x - 2) + Bx^2(x - 2) + Cx^2(x + 2).$$

Eliminando os parênteses e agrupando os termos de mesmo grau, obtemos:

$$x^3 + 3x - 1 = (A_1 + B + C)x^3 + (A_2 - 2B + 2C)x^2 + (-4A_1)x - 4A_2.$$

Da igualdade polinomial acima, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A_1 + B + C = 1 \\ A_2 - 2B + 2C = 0 \\ -4A_1 = 3 \\ -4A_2 = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $A_1 = -\frac{3}{4}$, $A_2 = \frac{1}{4}$, $B = \frac{15}{16}$ e $C = \frac{13}{16}$. Portanto,

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{15}{16}}{x+2} + \frac{\frac{13}{16}}{x-2}$$

Finalmente, temos a integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx &= -\frac{3}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2} + \frac{15}{16} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{13}{16} \int \frac{dx}{x-2} \\ &= -\frac{3}{4} \ln|x| + \frac{1}{4} \frac{x^{-1}}{(-1)} + \frac{15}{16} \ln|x+2| + \frac{13}{16} \ln|x-2| + K \\ &= -\frac{3}{4} \ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{15}{16} \ln|x+2| + \frac{13}{16} \ln|x-2| + K \end{aligned}$$

ou ainda, utilizando propriedades dos logaritmos,

$$\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{(x+2)^{15}(x-2)^{13}}{x^{12}} \right| - \frac{1}{4x} + K.$$

Exemplo 1.37. Calcular $\int f(x)dx$, em que $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3}$.

Solução: Note que dois fatores lineares se repetem: x duas vezes, e $x - 2$ três vezes. Assim, a fração do integrando pode ser escrita como soma de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{B_3}{(x-2)^3} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{x-2},$$

ou ainda, $x^3 - 1 = A_2(x-2)^3 + A_1x(x-2)^3 + A_3x^2 + B_2x^2(x-2) + B_1x^2(x-2)^2$. Pela igualdade entre funções polinomiais temos que:

$$A_2 = \frac{1}{8}, A_1 = \frac{3}{16}, B_3 = \frac{7}{4}, B_2 = \frac{5}{4} \text{ e } B_1 = -\frac{3}{116}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} dx &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{3}{16} \int \frac{1}{x} dx + \frac{7}{4} \int \frac{1}{(x-2)^3} dx + \frac{5}{4} \int \frac{1}{(x-2)^2} dx - \frac{3}{116} \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16} \ln|x| - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{116} \ln|x-2| + K. \end{aligned}$$

(3) Os fatores de $q(x)$ são **quadráticos irredutíveis**, e **nenhum fator quadrático é repetido**. Correspondendo ao fator quadrático $ax^2 + bx + c$ no denominador, temos uma fração parcial da forma:

$$\frac{Ax + b}{ax^2 + bx + c}.$$

Exemplo 1.38. Calcular $\int f(x)dx$, em que $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}$.

Solução: Primeiramente, $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0, \forall x$, ou seja, o trinômio é irredutível. Assim, a fração do integrando pode ser escrita como soma de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1},$$

ou ainda, $x^2 - 2x + 3 = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2x + 2)$. Desenvolvendo, e igualando os polinômios, obtemos:

$$A = \frac{9}{5}, B = \frac{7}{5} \text{ e } C = -\frac{4}{5}.$$

Portanto,

$$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} dx = \frac{9}{5} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx + \frac{7}{5} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{4}{5} \int \frac{1}{x - 1} dx$$

Para integrar $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx$, percebamos que a diferencial do denominador é $2(x + 1) dx$. Assim, se somarmos e subtrairmos 1 no numerador, obteremos

$$\frac{9}{5} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{9}{5} \left(\frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \right).$$

Retornando a nossa integral, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} dx &= \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{2}{5} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x - 1} \\ &= \frac{9}{10} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{2}{5} \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx - \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x - 1} \\ &= \frac{9}{10} \ln |x^2 + 2x + 2| - \frac{2}{5} \arctg(x + 1) - \frac{4}{5} \ln |x - 1| + K \\ &= \ln \frac{\sqrt[10]{(2x^2 + 2x + 2)^9}}{\sqrt[5]{(x - 1)^4}} - \frac{2}{5} \arctg(x + 1) + K. \end{aligned}$$

(4) Os fatores de $q(x)$ são **quadráticos irredutíveis**, e alguns dos **fatores quadráticos são repetidos**. Se $ax^2 + bx + c$ for um fator quadrático no denominador que se repete p vezes, então correspondendo ao fator $(ax^2 + bx + c)^p$, teremos a soma das p frações parciais:

$$\frac{A_p x + B_p}{(ax^2 + bx + c)^p} + \frac{A_{p-1} x + B_{p-1}}{(ax^2 + bx + c)^{p-1}} + \dots + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c},$$

em que A_1, A_2, \dots, A_p e B_1, B_2, \dots, B_p são constantes reais a serem determinadas.

Exemplo 1.39. Calcular $\int f(x)dx$, em que $f(x) = \frac{x - 2}{x(x^2 - 4x + 5)^2}$.

Solução: Como $x^2 - 4x + 5$ é um trinômio irredutível, a fração do integrando pode ser escrita como soma

de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{x - 2}{x(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{C}{x} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 - 4x + 5)^2} + \frac{A_1x + B_1}{x^2 - 4x + 5}$$

em que $A_1 = \frac{2}{25}$, $A_2 = -\frac{42}{25}$, $B_1 = -\frac{8}{25}$, $B_2 = \frac{13}{5}$ e $C = -\frac{2}{25}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 2}{x(x^2 - 4x + 5)^2} dx &= \int \left(-\frac{2}{25} \cdot \frac{1}{x} + \frac{-\frac{42x}{25} + \frac{13}{5}}{(x^2 - 4x + 5)^2} + \frac{\frac{2x}{25} - \frac{8}{25}}{x^2 - 4x + 5} \right) dx \\ &= -\frac{2}{25} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{25} \int \frac{-42x + 65}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx + \frac{2}{25} \int \frac{x - 4}{x^2 - 4x + 5} dx \\ &= \dots \text{continuar} \dots \end{aligned}$$

1.2.4 Integrais de Expressões Racionais Contendo $\text{sen}(x)$ e/ou $\text{cos}(x)$

Se o integrando envolver uma função racional de $\text{sen}(x)$ e/ou $\text{cos}(x)$ ele poderá ser reduzido a uma fração racional de w pela substituição $w = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Com as seguintes identidades trigonométricas $\text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen}(\theta) \cdot \text{cos}(\theta)$ e $\text{cos}(2\theta) = 2 \text{cos}^2(\theta) - 1$, procedemos da seguinte maneira:

$$\diamond \text{sen}(x) = 2 \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \text{cos}\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \frac{2 \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \text{cos}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\text{cos}\left(\frac{x}{2}\right)} = 2 \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{\text{sec}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\diamond \text{cos}(x) = 2 \text{cos}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\text{sec}^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1 + \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{1 - \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Como $w = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, temos

$$\text{sen}(x) = \frac{2w}{1 + w^2} \quad \text{e} \quad \text{cos}(x) = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}$$

Além disso, $\frac{x}{2} = \text{arctg}(w)$ e daí $dx = \frac{2}{1 + w^2} dw$.

Resumimos estes resultados no seguinte teorema.

1.24 Teorema. Se um integrando é uma expressão racional em $\text{sen}(x)$ e/ou $\text{cos}(x)$, obteremos uma expressão racional em w mediante a seguinte substituição:

$$\text{sen}(x) = \frac{2w}{1 + w^2}, \quad \text{cos}(x) = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}, \quad dx = \frac{2}{1 + w^2} dw$$

onde $w = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exemplo 1.40. Calcular $\int \frac{1}{1 + \text{sen}(x) + \text{cos}(x)} dx$.

Solução: Fazendo $w = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, pelas fórmulas dadas no teorema acima, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \text{sen}(x) + \text{cos}(x)} dx &= \int \frac{\frac{2}{1+w^2}}{1 + \frac{2w}{1+w^2} + \frac{1-w^2}{1+w^2}} dw = 2 \int \frac{1}{1+w^2+2w+1-w^2} dw \\ &= 2 \int \frac{1}{2+2w} dw = \int \frac{1}{1+w} dw \\ &= \ln|1+w| + K = \ln\left|1 + \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + K \end{aligned}$$

1.25 Observação. O teorema que acabamos de ver, pode ser usado para qualquer integrando que seja uma expressão racional em $\text{sen}(x)$ e/ou $\text{cos}(x)$; todavia, é importante considerar substituições mais simples, como o exemplo a seguir.

Exemplo 1.41. Calcular $\int \frac{\text{cos}(x)}{1 + \text{sen}^2(x)} dx$.

Solução: Poderíamos usar o teorema dado para transformar em uma expressão racional em w , no entanto, com a seguinte substituição $u = \text{sen}(x)$, $du = \text{cos}(x)dx$, temos:

$$\int \frac{\text{cos}(x)}{1 + \text{sen}^2(x)} dx = \int \frac{1}{1 + u^2} du = \text{arctg}(u) + k = \text{arctg}(\text{sen}(x)) + K,$$

quem é uma resolução bem mais simples.

1.2.5 Integrais de Algumas Funções Irracionais

Não há uma regra geral para resolver integrais que envolvam funções irracionais. No entanto, veremos que muitas delas podem ser resolvidas com auxílio de outras técnicas de integração após termos efetuado uma simples mudança de variável (adequada). Considere o seguinte:

Se o integrando envolver potências fracionárias à variável x , então o integrando pode ser simplificado pela substituição

$$F(x) = w^n \text{ e } F'(x)dx = n \cdot w^{n-1}dw,$$

em que n é o menor denominador comum entre os denominadores dos expoentes.

Exemplo 1.42. Calcular $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$.

Solução: Como os expoentes fracionários são $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, logo $n = \text{mmc}(2,3) = 6$. Fazendo $x = w^6$ e $dx = 6w^5 dw$, temos:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{w^3 (6w^5)}{1 + w^2} dw = 6 \int \frac{w^8}{w^2 + 1} dw.$$

Note que o integrando é uma fração imprópria, assim dividindo o numerador pelo denominador teremos:

$$\frac{w^8}{w^2 + 1} = w^6 - w^4 + w^2 - 1 + \frac{1}{w^2 + 1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx &= 6 \int \frac{w^8}{w^2 + 1} dw = 6 \int \left(w^6 - w^4 + w^2 - 1 + \frac{1}{w^2 + 1} \right) dw \\ &= 6 \left(\frac{1}{7} w^7 - \frac{1}{5} w^5 + \frac{1}{3} w^3 - w + \arctg(w) \right) + K = \dots \end{aligned}$$

Exemplo 1.43. Calcular $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2 + 4}} dx$.

Solução: Neste caso, $n = 3$. Assim, fazendo $x^2 + 4 = w^3$, temos que $x^2 = w^3 - 4$ e $x dx = \frac{3}{2} w^2 dw$. Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2 + 4}} dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2 + 4}} x dx = \int \frac{w^3 - 4}{w} \cdot \frac{3}{2} w^2 dw \\ &= \frac{3}{2} \int (w^4 - 4w) dw = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5} w^5 - 2w^2 \right) + K = \dots \end{aligned}$$

Exemplo 1.44. Calcular $\int \sqrt{\frac{1 - 2x}{1 + 3x}} dx$.

Solução: A substituição $w^2 = \frac{1 - 2x}{1 + 3x}$ conduz a $x = \frac{1 - w^2}{3w^2 + 2}$ e $dx = -\frac{10w}{(3w^2 + 2)^2} dw$. Logo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1 - 2x}{1 + 3x}} dx &= -10 \int \frac{w^2}{(3w^2 + 2)^2} dw = -10 \int \frac{w^2}{\left[3 \left(w^2 + \frac{2}{3} \right) \right]^2} dw \\ &= -\frac{10}{9} \int w \cdot \frac{w}{\left(w^2 + \frac{2}{3} \right)^2} dw. \end{aligned}$$

Integrando por partes, em que $u = w$ e $dv = \frac{w}{\left(w^2 + \frac{2}{3} \right)^2} dw, \dots$ “continuar”

Exemplo 1.45. Calcular (a) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x^2} - 1)} dx$ e (b) $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{4x + 2\sqrt{x}} dx$

Solução: ♣ ♦ ♥ ♠

1.2.6 Integração Trigonométrica

Algumas integrais envolvendo funções trigonométricas podem ser resolvidas usando identidades trigonométricas e o método da substituição.

Na seção de Integração por Partes (seção 1.2.1, página 18), obtivemos fórmulas de redução para integrais de potências do Seno, Cosseno, Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante. Integrais desse tipo podem ser calculadas sem recorrer à integração por partes e/ou às fórmulas de redução. Conforme n (a potência inteira) seja par ou ímpar podemos usar as identidades trigonométricas

$$\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1, \quad \text{tg}^2(x) + 1 = \text{sec}^2(x), \quad \text{cotg}^2(x) + 1 = \text{cossec}^2(x),$$

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \text{cos}^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

e o método de substituição, como veremos.

Integração de Potências do Seno e do Cosseno

1º Caso: Consideremos as integrais do tipo $\int \text{sen}^n(x)dx$ ou $\int \text{cos}^n(x)dx$.

(a) Se n é inteiro positivo ímpar escrevemos:

$$\int \text{sen}^n(x)dx = \int \text{sen}^{n-1}(x) \cdot \text{sen}(x)dx \text{ ou } \int \text{cos}^n(x)dx = \int \text{cos}^{n-1}(x) \cdot \text{cos}(x)dx$$

Como $n - 1$ é par, podemos utilizar a identidade trigonométrica $\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$ e o método de substituição, para obtermos uma fórmula fácil de integração, tal como nos exemplos abaixo.

Exemplo 1.46. Resolva a integral dada por $\int \text{sen}^5(x)dx$.

Solução: De acordo com a sugestão acima, escrevemos

$$\int \text{sen}^5(x)dx = \int \text{sen}^4(x) \text{sen}(x)dx = \int (\text{sen}^2(x))^2 \text{sen}(x)dx = \int (1 - \text{cos}^2(x))^2 \text{sen}(x)dx.$$

Fazendo $u = \text{cos}(x), du = -\text{sen}(x)dx$, substituindo na identidade acima temos:

$$\int \text{sen}^5(x)dx = - \int (1 - u)^2 du = - \int (1 - 2u^2 + u^4)du = -u + \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + K,$$

e portanto $\int \text{sen}^5(x)dx = -\text{cos}(x) + \frac{2\text{cos}^3(x)}{3} - \frac{\text{cos}^5(x)}{5} + K.$

Exemplo 1.47. Resolva a integral dada por $\int \text{cos}^7(x)dx$.

Solução: Como $\int \text{cos}^7(x)dx = \int \text{cos}^6(x) \cdot \text{cos}(x)dx = \int (1 - \text{sen}^2(x))^3 \cdot \text{cos}(x)dx$, pela substituição $u = \text{sen}(x), du = \text{cos}(x)dx$, temos

$$\begin{aligned} \int \text{cos}^7(x)dx &= \int (1 - u^2)^3 du = \int (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) du \\ &= u - u^3 + \frac{3u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + K \\ &= \text{sen}(x) - \text{sen}^3(x) + \frac{3\text{sen}^5(x)}{5} - \frac{\text{sen}^7(x)}{7} + K \end{aligned}$$

(b) Se n é inteiro positivo par, então podemos aplicar a fórmula de ângulo metade para simplificar a integral, a saber:

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \text{ ou } \text{cos}^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Exemplo 1.48. Calcule $\int \text{cos}^2(x)dx$.

Solução: $\int \text{cos}^2(x)dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x)dx = \dots$

Exemplo 1.49. Calcule $\int \text{sen}^4(x)dx$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^4(x)dx &= \int (\text{sen}^2(x))^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int 2 \cos(2x)dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x)dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x)dx + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos(4x)}{2} dx \\ &= \dots \end{aligned}$$

2º Caso: Diretrizes para calcular $\int \text{sen}^m(x) \cos^n(x)dx$.

(a) Se m é ímpar, escrevemos

$$\int \text{sen}^m(x) \cos^n(x)dx = \int \text{sen}^{m-1}(x) \text{sen}(x) \cos^n(x)dx$$

e expressamos $\text{sen}^{m-1}(x)$ em termos de $\cos(x)$ mediante a identidade trigonométrica $\text{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. E fazemos a substituição $u = \cos(x)$, $du = -\text{sen}(x)dx$ e calculamos a integral.

(b) Se n é ímpar, escrevemos

$$\int \text{sen}^m(x) \cos^n(x)dx = \int \text{sen}^m(x) \cos^{n-1}(x) \cos(x)dx$$

e expressamos $\cos^{n-1}(x)$ em termos de $\text{sen}(x)$ mediante a identidade trigonométrica $\cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x)$. E fazemos a substituição $u = \text{sen}(x)$, $du = \cos(x)dx$ e calculamos a integral.

(c) Se pelo menos um dos expoentes for ímpar, o procedimento é semelhante aos itens (a) e (b) acima.

(d) Se m e n são pares utilizamos fórmulas de ângulo metade para $\text{sen}^2(x)$ e $\cos^2(x)$, que são

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \text{ e } \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

para reduzir os expoentes.

Exemplo 1.50. Determine (a) $\int \text{sen}^3(x) \cos^4(x)dx$ e (b) $\int \text{sen}^2(x) \cdot \cos^4(x)dx$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^3(x) \cos^4(x)dx &= \int \text{sen}^2(x) \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos^4(x)dx \\ &= \int (1 - \cos^2(x)) \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos^4(x)dx \\ &= \int \text{sen}(x) \cdot \cos^4(x)dx - \int \text{sen}(x) \cdot \cos^6(x)dx \end{aligned}$$

Fazendo $u = \cos(x)$, temos $du = -\sin(x)dx$ e então

$$\begin{aligned} \int \sin^3(x) \cos^4(x) dx &= \int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx - \int \sin(x) \cdot \cos^6(x) dx \\ &= -\int u^4 du + \int u^6 du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + K \\ &= -\frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{\cos^7(x)}{7} + K \end{aligned}$$

(b)

$$\int \sin^2(x) \cdot \cos^4(x) dx = \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 dx = \dots$$

Integração de Potências das demais Funções Trigonômétricas

Veremos como resolver algumas integrais de potências da Tangente, da Cotangente, da Secante e da Cossecante. Primeiramente, relembremos algumas fórmulas envolvendo tangente, cotangente, secante e cossecante:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}(x) dx &= \ln |\sec(x)| + K & \int \operatorname{cotg}(x) dx &= \ln |\sin(x)| + K \\ \int \sec(x) dx &= \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + K & \int \operatorname{cossec}(x) dx &= \ln |\operatorname{cossec}(x) - \operatorname{cotg}(x)| + K \\ \int \sec^2(x) dx &= \operatorname{tg}(x) + K & \int \operatorname{cossec}^2(x) dx &= -\operatorname{cotg}(x) + K \\ \int \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx &= \sec(x) + K & \int \operatorname{cossec}(x) \operatorname{cotg}(x) dx &= -\operatorname{cossec}(x) + K \end{aligned}$$

Com essas fórmulas e as identidades trigonométricas

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x) \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg}^2(x) + 1 = \operatorname{cossec}^2(x)$$

podemos calcular integrais da forma

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) dx \quad \text{e} \quad \int \operatorname{cotg}^m(x) \operatorname{cossec}^n(x) dx$$

em que m e n são inteiros não negativos.

1º Caso: Consideremos as integrais do tipo $\int \operatorname{tg}^n(x) dx$ ou $\int \operatorname{cotg}^n(x) dx$

Se n é inteiro positivo escrevemos:

$$\int \operatorname{tg}^n(x) dx = \int \operatorname{tg}^{n-2}(x) \cdot \operatorname{tg}^2(x) dx = \int \operatorname{tg}^{n-2}(x) \cdot (\sec^2(x) - 1) dx$$

e

$$\int \operatorname{cotg}^n(x) dx = \int \operatorname{cotg}^{n-2}(x) \cdot \operatorname{cotg}^2(x) dx = \int \operatorname{cotg}^{n-2}(x) \cdot (\operatorname{cossec}^2(x) - 1) dx.$$

Com o método de substituição, obtemos uma fórmula fácil de integração, tal como nos exemplos abaixo.

Exemplo 1.51. Determine (a) $\int \operatorname{tg}^3(x) dx$ e (b) $\int \operatorname{cotg}^4(3x) dx$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3(x) dx &= \int \operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{tg}^2(x) dx = \int \operatorname{tg}(x) \cdot (\sec^2(x) - 1) dx \\ &= \int \operatorname{tg}(x) \cdot \sec^2(x) dx - \int \operatorname{tg}(x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) + \ln |\cos(x)| + K \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \cotg^4(3x) dx &= \frac{1}{3} \int \cotg^4(u) du = \frac{1}{3} \int \cotg^2(u) \cdot \cotg^2(u) du \\ &= \frac{1}{3} \int \cotg^2(u) \cdot (\operatorname{cosec}^2(u) - 1) du \\ &= \frac{1}{3} \int \cotg^2(u) \cdot \operatorname{cosec}^2(u) du - \frac{1}{3} \int \cotg^2(u) du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} (-\cotg^3(u)) - \frac{1}{3} \int (\operatorname{cosec}^2(u) - 1) du \\ &= -\frac{1}{9} \cotg^3(3x) + \frac{1}{3} \cotg(3x) + x + K \end{aligned}$$

2º Caso: Consideremos as integrais do tipo $\int \sec^n(x) dx$ ou $\int \operatorname{cosec}^n(x) dx$

(a) Se n é um inteiro positivo par, escrevemos

$$\begin{aligned} \int \sec^n(x) dx &= \int \sec^{n-2}(x) \cdot \sec^2(x) dx = \int (\sec^2(x))^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sec^2(x) dx \\ &= \int (\tg^2(x) + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sec^2(x) dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec}^n(x) dx &= \int \operatorname{cosec}^{n-2}(x) \cdot \operatorname{cosec}^2(x) dx = \int (\operatorname{cosec}^2(x))^{\frac{n-2}{2}} \cdot \operatorname{cosec}^2(x) dx \\ &= \int (\cotg^2(x) + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \operatorname{cosec}^2(x) dx. \end{aligned}$$

Com a substituição $u = \tg(x)$ (e $u = \cotg(x)$) obtemos uma fórmula fácil de integração.

Exemplo 1.52. Determine $\int \operatorname{cosec}^6(x) dx$.

Solução:

$$\int \operatorname{cosec}^6(x) dx = \int (\operatorname{cosec}^2(x))^2 \cdot \operatorname{cosec}^2(x) dx = \int (\cotg^2(x) + 1)^2 \cdot \operatorname{cosec}^2(x) dx$$

Pela substituição $u = \cotg(x)$ e $-du = \operatorname{cosec}^2(x) dx$, temos

$$\int \operatorname{cosec}^6(x) dx = - \int (u^2 + 1)^2 du = \dots$$

(b) Se n é inteiro positivo ímpar, utilizamos a integração por partes.

Exemplo 1.53. Determine $\int \sec^3(x) dx$.

Solução: Integramos por partes $\sec^3(x)$. Como $\int \sec^3(x) dx = \int \sec(x) \cdot \sec^2(x) dx$, podemos escolher $u = \sec(x)$ e $dv = \sec^2(x) dx$. Assim, $du = \sec(x) \cdot \tg(x) dx$ e $v = \tg(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \sec^3(x) dx &= \sec(x) \cdot \tg(x) - \int \sec(x) \cdot \tg^2(x) dx \\ &= \sec(x) \cdot \tg(x) - \int \sec(x) \cdot (\sec^2(x) - 1) dx \\ &= \sec(x) \cdot \tg(x) - \int \sec^3(x) dx + \int \sec(x) dx \\ &= \sec(x) \cdot \tg(x) + \ln |\sec(x) + \tg(x)| - \int \sec^3(x) dx \end{aligned}$$

Portanto $2 \int \sec^3(x)dx = \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x) + \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + 2K$, e finalmente:

$$\int \sec^3(x)dx = \frac{1}{2} \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x) + \frac{1}{2} \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + K.$$

3º Caso: Consideremos as integrais do tipo $\int \operatorname{tg}^m(x) \cdot \sec^n(x)dx$ ou $\int \operatorname{cotg}^m(x) \cdot \operatorname{cosec}^n(x)dx$

(a) Se m é ímpar, escrevemos a integral como

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \cdot \sec^n(x)dx = \int \operatorname{tg}^{m-1}(x) \cdot \sec^{n-1}(x) \cdot \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)dx$$

e expressamos $\operatorname{tg}^{m-1}(x)$ em termos de $\sec(x)$ mediante a identidade trigonométrica $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$.
E fazemos a substituição $u = \sec(x)$, $du = \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)dx$ e calculamos a integral.

(b) Se n é ímpar, escrevemos a integral como

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x)dx = \int \operatorname{tg}^m(x) \sec^{n-2}(x) \sec^2(x)dx$$

e expressamos $\sec^{n-2}(x)$ em termos de $\operatorname{tg}(x)$ mediante a identidade trigonométrica $\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$.
E fazemos a substituição $u = \operatorname{tg}(x)$, $du = \sec^2(x)dx$ e calculamos a integral.

(c) Se m é par e n é ímpar não há método padrão para o cálculo da integral. Essa pode ser resolvida por integração por partes.

1.26 Observação. De modo análogo são calculadas as integrais da forma $\int \operatorname{cotg}^m(x) \operatorname{cosec}^n(x)dx$

Exemplo 1.54. Determine (a) $\int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x)dx$ e (b) $\int \operatorname{tg}^2(x) \sec^3(x)dx$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x)dx &= \int \operatorname{tg}^4(x) \cdot \sec^6(x) \cdot \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)dx \\ &= \int (\sec^2(x) - 1)^2 \cdot \sec^6(x) \cdot \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)dx \end{aligned}$$

Com $u = \sec(x)$ temos $du = \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)dx$, e então

$$\int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x)dx = \int (u^2 - 1)^2 u^6 du = \dots$$

(b)

$$\int \operatorname{tg}^2(x) \sec^3(x)dx = \int (\sec^2(x) - 1) \cdot \sec^3(x)dx = \int \sec^5(x)dx - \int \sec^3(x)dx$$

Para calcular essas duas últimas integrais, usa-se integração por partes. **FAÇA!**

Integrais Envolvendo Produtos

As integrais trigonométricas que envolvem os produtos

$$\cos(mx) \cdot \cos(nx); \quad \operatorname{sen}(mx) \cdot \operatorname{sen}(nx) \quad \text{ou} \quad \cos(mx) \cdot \operatorname{sen}(nx)$$

são facilmente resolvidas quando utilizamos as fórmulas de soma-produto, a saber:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)); \\ \cos(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)); \\ \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)); \\ \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)). \end{cases}$$

que são facilmente obtidas pelas fórmulas do seno e cosseno da soma,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}(a) \cos(b) + \cos(a) \operatorname{sen}(b), \\ \cos(a+b) &= \cos(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b). \end{aligned}$$

Exemplo 1.55. Determine $\int \operatorname{sen}(3x) \cos(4x) dx$.

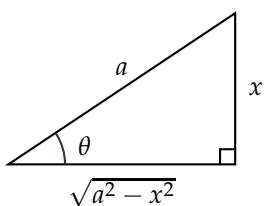
Solução:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(3x) \cos(4x) dx &= \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen}(3x+4x) + \operatorname{sen}(3x-4x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(7x) dx - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(x) dx = \dots \end{aligned}$$

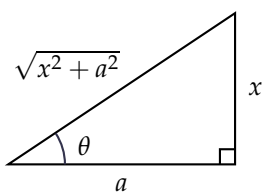
Integrais por Substituição Trigonométrica

As substituições trigonométricas nos permitem substituir os binômios $a^2 - x^2$, $a^2 + x^2$ e $x^2 - a^2$ pelo quadrado de um único termo e, portanto, transformar várias integrais que contêm raízes quadradas em integrais que podemos calcular diretamente.

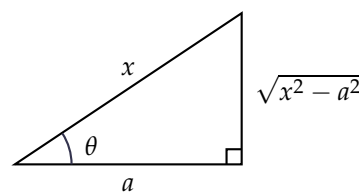
As substituições mais comuns são $x = a \operatorname{sen}(\theta)$, $x = a \operatorname{tg}(\theta)$ e $x = a \operatorname{sec}(\theta)$, $a \in \mathbb{R}$. Elas podem ser visualizadas nos seguintes triângulos retângulos:



$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{sen}(\theta) \\ \sqrt{a^2 - x^2} &= a |\cos(\theta)| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{tg}(\theta) \\ \sqrt{a^2 + x^2} &= a |\sec(\theta)| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{sec}(\theta) \\ \sqrt{x^2 - a^2} &= a |\operatorname{tg}(\theta)| \end{aligned}$$

1. Com $x = a \operatorname{sen}(\theta)$, temos $dx = a \cdot \cos(\theta) d\theta$ e

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2(\theta) = a^2 (1 - \operatorname{sen}^2(\theta)) = a^2 \cos^2(\theta).$$

2. Com $x = a \operatorname{tg}(\theta)$, temos $dx = a \cdot \sec^2(\theta) d\theta$ e

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2(\theta) = a^2 (1 + \operatorname{tg}^2(\theta)) = a^2 \sec^2(\theta).$$

3. Com $x = a \sec(\theta)$, temos $dx = a \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta)d\theta$ e

$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2(\theta) - a^2 = a^2 (\sec^2(\theta) - 1) = a^2 \operatorname{tg}^2(\theta).$$

Resumimos assim:

| Substituição Trigonométrica | | | | | |
|-----------------------------|------------------------------------|-----------|-------------|-----|-----------------------------------|
| 1. | $x = a \operatorname{sen}(\theta)$ | substitui | $a^2 - x^2$ | por | $a^2 \cos^2(\theta)$ |
| 2. | $x = a \operatorname{tg}(\theta)$ | substitui | $a^2 + x^2$ | por | $a^2 \sec^2(\theta)$ |
| 3. | $x = a \sec(\theta)$ | substitui | $x^2 - a^2$ | por | $a^2 \operatorname{tg}^2(\theta)$ |

Quando fazemos uma substituição, queremos que a mesma seja revertida de maneira que possamos voltar para a variável original posteriormente. Por exemplo, se $x = a \operatorname{sen}(\theta)$, queremos poder estabelecer que $\theta = \operatorname{arcsen}(\frac{x}{a})$ após a integração ter ocorrido. Se $x = a \operatorname{tg}(\theta)$, queremos poder estabelecer que $\theta = \operatorname{arctg}(\frac{x}{a})$ no final, o mesmo valendo para $x = a \sec(\theta)$.

Para a reversibilidade precisamos que θ esteja no contradomínio da função trigonométrica inversa correspondente, vejamos:

| Reversibilidade na Substituição Trigonométrica | | | | | | |
|--|------------------------------------|-------|---|-----|---|---|
| 1. | $x = a \operatorname{sen}(\theta)$ | exige | $\theta = \operatorname{arcsen}(\frac{x}{a})$ | com | $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ | logo $\cos(\theta) \geq 0$ |
| 2. | $x = a \operatorname{tg}(\theta)$ | exige | $\theta = \operatorname{arctg}(\frac{x}{a})$ | com | $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ | logo $\sec(\theta) \geq 0$ |
| 3. | $x = a \sec(\theta)$ | exige | $\theta = \operatorname{arcsec}(\frac{x}{a})$ | com | $\begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, & \frac{x}{a} \geq 1 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, & \frac{x}{a} \leq -1 \end{cases}$ | logo $\operatorname{tg}(\theta) \geq 0$ |

Nestas condições, quando o integrando contiver expressões do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ou $\sqrt{x^2 - a^2}$, em que $a \in \mathbb{R}_+$, em geral é possível efetuar a integração através de uma substituição trigonométrica. Que levará a uma integral envolvendo funções trigonométricas.

Exemplo 1.56. Aplicando uma substituição trigonométrica conveniente, calcular as seguintes integrais:

(a) $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx;$ (b) $\int \sqrt{x^2 + 5} dx;$ (c) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 9}}.$

Solução:

(a) Temos no integrando uma expressão do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, onde $a = 3$. Assim, fazemos $x = 3 \operatorname{sen}(\theta)$, donde $dx = 3 \cos(\theta)d\theta$ e, então:

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2(\theta)} = 3\sqrt{\cos^2(\theta)} = 3 \cos(\theta).$$

Substituindo na integral, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{3 \cos(\theta)}{9 \operatorname{sen}^2(\theta)} 3 \cos(\theta)d\theta = \int \frac{9 \cos^2(\theta)}{9 \operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta = \int \operatorname{cotg}^2(\theta)d\theta \\ &= \int [\operatorname{cosec}^2(\theta) - 1]d\theta = \int \operatorname{cosec}^2(\theta)d\theta - \int d\theta = -\operatorname{cotg}(\theta) - \theta + C \end{aligned}$$

Para voltarmos à variável original x , usamos as relações trigonométricas e as funções trigonométricas inversas. De $x = 3 \operatorname{sen}(\theta)$, obtemos diretamente $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{x}{3}$ e $\theta = \operatorname{arcsen}(\frac{x}{3})$. Além disso, de $\sqrt{9 - x^2} =$

$3 \cos(\theta)$, temos também que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$. Daí, temos $\cotg(\theta) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. Portanto, voltando à integral, temos, finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx = -\frac{9-x^2}{x} - \arcsen(\theta) + C.$$

(b) O integrando envolve uma expressão da forma $\sqrt{a^2+x^2}$, em que $a = \sqrt{5}$. Então, devemos fazer $x = \sqrt{5} \operatorname{tg}(\theta)$, de onde se tem $dx = \sqrt{5} \sec^2(\theta) d\theta$ e então:

$$\sqrt{x^2+5} = \sqrt{(\sqrt{5} \operatorname{tg}(\theta))^2 + 5} = \sqrt{5 \operatorname{tg}^2(\theta) + 5} = \sqrt{5(\operatorname{tg}^2(\theta) + 1)} = \sqrt{5 \sec^2(\theta)} = \sqrt{5} \sec(\theta).$$

Aplicando as substituições na integral, temos:

$$\int \sqrt{x^2+5} dx = \int \sqrt{5} \sec(\theta) \sqrt{5} \sec^2(\theta) d\theta = \int 5 \sec^3(\theta) d\theta = 5 \int \sec^3(\theta) d\theta$$

Aproveitando o cálculo da integral $\int \sec^3(\theta) d\theta$, já feito anteriormente, temos:

$$\int \sqrt{x^2+5} dx = \frac{5}{2} [\operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) + \ln |\operatorname{tg}(\theta) + \sec(\theta)|] + C.$$

Agora, para dar a resposta em função de x , utilizemos as relações trigonométricas e as expressões das substituições. De $x = \sqrt{5} \operatorname{tg}(\theta)$, vem $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{\sqrt{5}}$ e, de $\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5} \sec(\theta)$, obtemos $\sec(\theta) = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}$.

Substituindo na expressão encontrada para a integral, temos, finalmente,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+5} dx &= \frac{5}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} \right| \right) + C \\ &= \frac{5}{2} \left(\frac{x\sqrt{x^2+5}}{5} + \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} \right| \right) + C \end{aligned}$$

Poderíamos, ainda, escrever $\int \sqrt{x^2+5} dx = \frac{5}{2} \left(\frac{x\sqrt{x^2+5}}{5} + \ln |x + \sqrt{x^2+5}| - \ln \sqrt{5} \right) + C$ e pondo $-\frac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C$ igual a uma outra constante C_1 , teríamos, então

$$\int \sqrt{x^2+5} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2} \ln |x + \sqrt{x^2+5}| + C_1.$$

(c) O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{x^2-a^2}$, onde $a = 3$. Devemos então fazer, de onde temos de imediato que $dx = 3 \operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) d\theta$. Então:

$$\begin{aligned} x^3 \sqrt{x^2-9} &= (3 \sec(\theta))^3 \sqrt{(3 \sec(\theta))^2 - 9} = 27 \sec^3(\theta) \sqrt{9 \sec^2(\theta) - 9} \\ &= 27 \sec^3(\theta) \sqrt{9(\sec^2(\theta) - 1)} = 27 \sec^3(\theta) \sqrt{9 \operatorname{tg}^2(\theta)} = 27 \sec^3(\theta) 3 \operatorname{tg}(\theta) \end{aligned}$$

Aplicando a integral, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3 \operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) d\theta}{27 \sec^3(\theta) 3 \operatorname{tg}(\theta)} = \frac{1}{27} \int \frac{d\theta}{\sec^2(\theta)} = \frac{1}{27} \int \cos^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{27} \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2} \left[\int d\theta + \int \cos(2\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{54} \left[\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta) \right] = \frac{1}{54} [\theta + \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)] \end{aligned}$$

Agora, voltemos à variável x . De $x = 3 \sec(\theta)$, temos que $\sec(\theta) = \frac{x}{3}$ e daí $\theta = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)$. Além disso, de $\sec(\theta) = \frac{x}{3}$, temos $\cos(\theta) = \frac{3}{x}$ e, juntamente com $x^3\sqrt{x^2-9} = 27 \sec^3(\theta) 3 \operatorname{tg}(\theta)$, concluímos (usando $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$) que $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$. Segue que,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{54} \left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \cdot \frac{3}{x} \right] + C = \frac{1}{54} \left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3\sqrt{x^2-9}}{x^2} \right] + C$$

Exemplo 1.57. Calcular as seguintes integrais por substituição trigonométrica.

(a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}} dx$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$ (c) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$ (d) $\int \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^6} dx$

Solução:

(a) $x = 4 \operatorname{sen}(\theta), \dots$

(b) $x = 2 \operatorname{tg}(\theta), \dots$

(c) $x = 3 \sec(\theta), \dots$

(d) $x = \operatorname{sen}(\theta), \dots$

1.3 Integral Definida

kkkkk

1.3.1 Antidiferenciação: A Integral Indefinida

Em estudos anteriores resolvemos problemas do tipo: *Dada uma função f , determinar sua derivada f' .* Estudaremos agora um problema relacionado: *Dada uma função f , achar uma função F tal que $F' = f$.* Ou seja, a operação inversa da derivada.

1.27 Definição. Uma função F será chamada de *antiderivada* ou *primitiva* de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x no intervalo I .

Exemplo 1.58. Se F for definida por $F(x) = x^2$, então $F'(x) = 2x$. Assim, se f for a função definida por $f(x) = 2x$, então f é a derivada de F e F é uma antiderivada, ou primitiva, de f .

existe uma família de antiderivadas de $2x$. Resumimos nos seguintes teoremas.

1.28 Teorema. Seja F uma antiderivada de f num intervalo I . Se G é uma outra antiderivada de f em I , então

$$G(x) = F(x) + K$$

para alguma constante arbitrária K e para todo x em I .

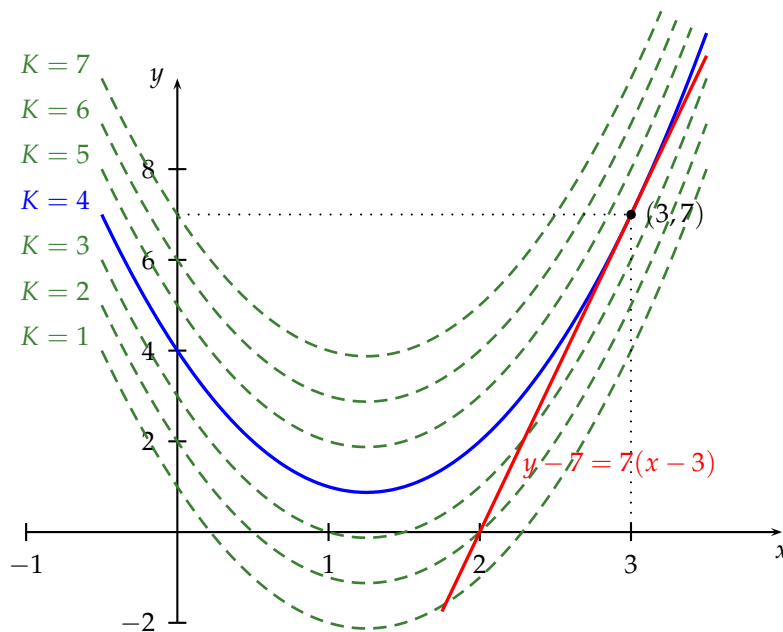
Prova: Seja H a função definida em I por $H(x) = G(x) - F(x)$. Então, para todo x em I temos que $H'(x) = G'(x) - F'(x)$. Mas, por hipótese, $G'(x) = F'(x)$ para todo x em I , logo $H'(x) = 0$ para todo x em I . Portanto H é uma função constante, digamos $H(x) = K$, assim $G(x) = F(x) + K$, para todo x em I .

1.29 Definição (A Integral Indefinida). O processo de se determinar todas as antiderivadas de uma função é chamado de *antidiferenciação* ou *integração*. Usamos o símbolo \int , chamado de *senal da integral*, para indicar que a operação de integração deve ser executada sobre uma função f . Assim

$$\int f(x)dx = F(x) + K$$

nos diz que a integral indefinida de f é a família de funções dada por $F(x) + K$, onde $F'(x) = f(x)$. A função f a ser integrada é chamada de *integrando*, e a constante K é chamada de *constante de integração*.

- | | |
|--|---|
| <p>1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K, n \neq -1;$</p> <p>2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + K;$</p> <p>3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + K, 0 < a \neq 1;$</p> <p>4. $\int e^x dx = e^x + K;$</p> <p>5. $\int \text{sen}(x)dx = -\text{cos}(x) + K;$</p> <p>6. $\int \text{cos}(x)dx = \text{sen}(x) + K;$</p> <p>7. $\int \text{sec}^2(x)dx = \text{tg}(x) + K;$</p> <p>8. $\int \text{cossec}^2(x)dx = -\text{cotg}(x) + K;$</p> | <p>9. $\int \text{sec}(x) \cdot \text{tg}(x)dx = \text{sec}(x) + K;$</p> <p>10. $\int \text{cossec}(x) \cdot \text{cotg}(x)dx = -\text{cossec}(x) + K;$</p> <p>11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsen}(x) + K;$</p> <p>12. $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arccos}(x) + K;$</p> <p>13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}(x) + K;$</p> <p>14. $\int \frac{-dx}{1+x^2} = \text{arccotg}(x) + K;$</p> <p>15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arcsec}(x) + K;$</p> <p>16. $\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arccossec}(x) + K;$</p> |
|--|---|



Exemplo 1.59. Uma equação da reta tangente t à curva C no ponto $(1, 3)$ é $t : y = x + 2$. Se em qualquer ponto (x, y) da curva $y = f(x)$ se tem $y'' = 6x$, encontrar uma equação para esta curva.

Solução: Pela equação da reta tangente à curva no ponto $(1, 3)$, temos que a sua inclinação neste ponto é $m_t(1) = 1$ (que é o coeficiente angular da reta t). Então, temos que $y'(1) = 1$. De $y'' = 6x$, lembrando que $y'' = \frac{dy'}{dx}$, ou ainda $dy' = y'' dx = 6x dx$, integrando em relação à x , obtemos:

$$y' = \int dy' = \int 6x dx = 6 \cdot \frac{x^2}{2} + K_1 = 3x^2 + K_1.$$

Como já temos $y'(1) = 1$, substituindo na igualdade acima, obtemos:

$$1 = 3 \cdot 1^2 + K_1 \Rightarrow K_1 = -2.$$

Daí, temos que $y' = 3x^2 - 2$. Como $y' = \frac{dy}{dx}$, ou ainda $dy = y' dx$. Integrando, mais uma vez, em relação à x , temos:

$$y = \int dy = \int y' dx = \int (3x^2 - 2) dx = \frac{3x^3}{3} - 2x + K_2 = x^3 - 2x + K_2.$$

Uma vez que o ponto $(1, 3)$ pertence à curva, temos que $y = 3$ quando $x = 1$. Portanto, substituindo, temos:

$$3 = 1^3 - 2 \cdot 1 + K_2 \Rightarrow K_2 = 4.$$

Portanto, uma equação para a curva C é $y = x^3 - 2x + 4$.