Universidade Salvador

Disciplina: Cálculo I — Semestre: 2013.1

Professor: *Adriano Cattai* — Data: 16/04/2013

Nome: ____

1^a Avaliação da Aprendizagem

Instruções:

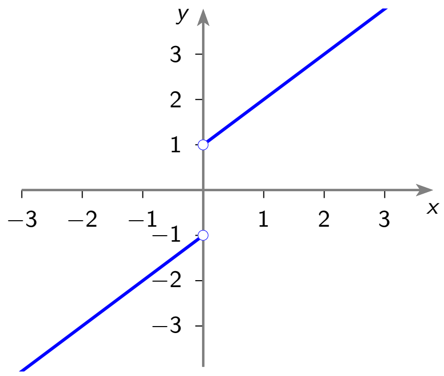
1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta* ***preta*** *ou* ***azul****;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Deus nos concede, a cada dia, uma página de vida nova no livro do tempo. Aquilo que colocarmos nela, corre por nossa conta." (Chico Xavier)

Boa Prova!

Q.* 1** (1,5).*** Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x}$, exiba seu gráfico e estude a continuidade de f.

Aqui, devemos ter $x \neq 0$ e, como $|x| = x$, $\forall\, x > 0$ e $|x| = -x$, $\forall\, x < 0$, seque que $f(x) = x + 1$ se $x > 0$ e $f(x) = x - 1$ se $x < 0$. Deste modo, temos duas semiretas, como mostra o gráfico ao lado.



De posse do gráfico, vemos que o limite em zero não existe (laterais diferentes), pois o direito é igual a 1 e o esquerdo é igual -1. E, como o zero não pertence ao domínio de f, não podemos dizer que f é descontínua neste ponto. Logo f é contínua.

Q.* 2** (4,0).*** Determine cada limite abaixo:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-1}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}^2(x) + \text{sen}^2(x)}{x + \text{sen}(x)}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[5]{x}+1}{1+\sqrt[3]{x}}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{-x^3+8}{-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}$.

(a) Observe que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-1}$ é indeterminado $-\infty + \infty$. Reduzindo ao mesmo denominador, temos:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x+1)-5}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^-\cdot 2} = -\infty.$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}^2(x) + \text{sen}^2(x)}{x + \text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(x)\left[\dfrac{1}{\cos^2(x)} + 1\right]}{x\left[1 + \dfrac{\text{sen}(x)}{x}\right]} = \lim_{x\to 0} \text{sen}(x) \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\dfrac{1}{\cos^2(x)} + 1}{1 + \dfrac{\text{sen}(x)}{x}} = 0 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = 0;$$

(c) Claramente que $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[5]{x}+1}{1+\sqrt[3]{x}}$ é indeterminado $0/0$, pois $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[3]{-1} = -1$. Da mudança de variável $x = y^{15}$, escrevemos:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[5]{x}+1}{1+\sqrt[3]{x}} = \lim_{y\to -1} \frac{y^3+1}{1+y^5} = \lim_{y\to -1} \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{(y+1)(y^4-y^3+y^2-y+1)} = \lim_{y\to -1} \frac{y^2-y+1}{y^4-y^3+y^2-y+1} = \frac{3}{5}.$$

(d) Note que o $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{-x^3+8}{-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}$ é indeterminado, pois $-2^3+8 = 0$ e $-1/2 + 1/2 = 0$. Escrevemos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x^3+8}{-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{\dfrac{x-2}{2x}} = \lim_{x\to 2} -2x(4+2x+x^2) = -48.$$

Q. 3 (1,5)**.** Determine o $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2\text{sen}(4+x^2)}{\sqrt{4+x^2}}$ por dois métodos:
(a) teorema do anulamento e (b) teorema do sanduíche.

(a) Pelo anulamento, temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2\text{sen}(4+x^2)}{\sqrt{4+x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}} + \lim\limits_{x\to+\infty} \text{sen}(4+x^2)\cdot\dfrac{2}{\sqrt{4+x^2}} = 0+0$, em que o primeiro zero é $\dfrac{1}{+\infty}$ e o segundo pelo fato em que a função seno é limitada e está multiplicando outra que tende a zero.
(b) Pelo sanduíche, sabendo que $-1 \leq \text{sen}(4+x^2) \leq 1$, temos $-2 \leq 2\cdot\text{sen}(4+x^2) \leq 2$ e $-1 \leq 1+2\cdot\text{sen}(4+x^2) \leq 3$. Dividindo, esta última, por $\sqrt{4+x^2}$, temos:

$$\frac{-1}{\sqrt{4+x^2}} \leq \frac{1+2\text{sen}(4+x^2)}{\sqrt{4+x^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{4+x^2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{4+x^2}} \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\text{sen}(4+x^2)}{\sqrt{4+x^2}} \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\text{sen}(4+x^2)}{\sqrt{4+x^2}} \leq 0$$

Logo, concluímos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2\text{sen}(4+x^2)}{\sqrt{4+x^2}} = 0$.

Q. 4 (2,0)**.** Determine, se existirem, as assíntotas verticais e horizontais das funções $f(x) = \dfrac{3x^2-x+3}{x^2+2x+2}$ e $g(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x+4}$.

Primeiramente analisaremos f. Como $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Deste modo não existe número a tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ seja infinito $(k/0)$ e, portanto, vemos que f não possui assíntota vetical. Agora, no infinito, temos:

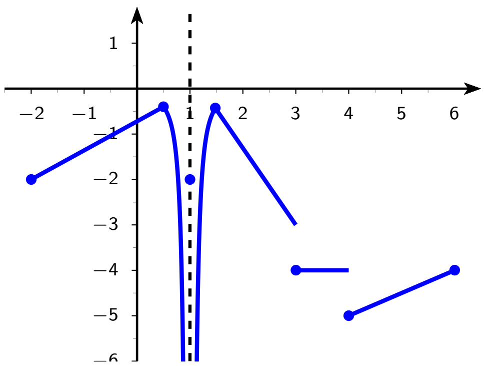
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-x+3}{x^2+2x+2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(3-1/x+3/x^2\right)}{x^2\left(1+2/x+2/x^2\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-1/x+3/x^2}{1+2/x+2/x^2} = \frac{3-0+0}{1+0+0} = 3,$$

daí, a reta $y=3$ é assíntota horixontal de f.
Analisando g, vemos que $g(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{(x-2)^2}$. Como $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4+x^2+1}{(x-2)^2} = \dfrac{21}{(0)^2} = \dfrac{21}{0^+} = +\infty$, temos que a reta $x=2$ é assíntota vertical de g. Por último, concluímos que g não possui assínto horizontal porque os limites no infinito não existem, veja:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(1+1/x^2+1/x^4\right)}{x^2\left(1-4/x+4/x^2\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\cdot\frac{1+1/x^2+1/x^4}{1-4/x+4/x^2} = +\infty\cdot\frac{1+0+0}{1-0+0} = +\infty.$$

Q. 5 (1,0)**.** Exiba o gráfico de uma função $f: [-2,6] \to \mathbb{R}^*_-$ tal que:

(1) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -2$
(2) $\lim\limits_{x\to6^-} f(x) = -4$
(3) f descontínua em $x=3$
(4) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$
(5) $\nexists \lim\limits_{x\to4} f(x)$
(6) $f(4) = -5$



Só isso.

Obrigado!