UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo I — SEMESTRE: 2013.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* — DATA: 16/04/2013

NOME: ____

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

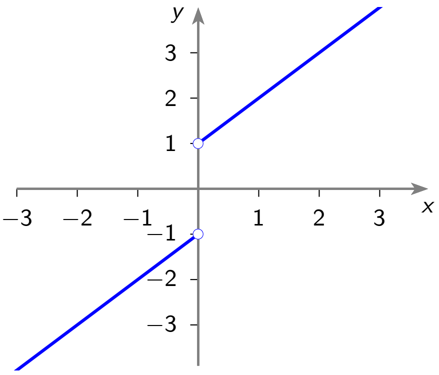
1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta* ***preta*** *ou* ***azul****;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Deus nos concede, a cada dia, uma página de vida nova no livro do tempo. Aquilo que colocarmos nela, corre por nossa conta." (Chico Xavier)

Boa Prova!

Q.* 1** (1,5).*** Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x}$, exiba seu gráfico e estude a continuidade de f.

Aqui, devemos ter $x \neq 0$ e, como $|x| = x$, $\forall\, x > 0$ e $|x| = -x$, $\forall\, x < 0$, seque que $f(x) = x + 1$ se $x > 0$ e $f(x) = x - 1$ se $x < 0$. Deste modo, temos duas semiretas, como mostra o gráfico ao lado.



De posse do gráfico, vemos que o limite em zero não existe (laterais diferentes), pois o direito é igual a 1 e o esquerdo é igual -1. E, como o zero não pertence ao domínio de f, não podemos dizer que f é descontínua neste ponto. Logo f é contínua.

Q.* 2** (4,0).*** Determine cada limite abaixo:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x}{x^3 - 2x^2 + x}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}^2(x) + \text{sen}^2(x)}{x + \text{sen}(x)}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{1 + \sqrt[3]{x}}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1 + 2\text{sen}(4 + x^2)}{\sqrt{4 + x^2}}$.

(a) Observe que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x}{x^3 - 2x^2 + x}$ é indeterminado $0/0$. Fatorando os polinômios temos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x^2 - 1)}{x(x^2 - 2x + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0}.$$

Estudando o sinal do denominador, concluímos: $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$.

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}^2(x) + \text{sen}^2(x)}{x + \text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(x)\left[\dfrac{1}{\cos^2(x)} + 1\right]}{x\left[1 + \dfrac{\text{sen}(x)}{x}\right]} = \lim_{x\to 0} \text{sen}(x) \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\dfrac{1}{\cos^2(x)} + 1}{1 + \dfrac{\text{sen}(x)}{x}} = 0 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = 0;$$

(c) Claramente que $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{1 + \sqrt[3]{x}}$ é indeterminado $0/0$, pois $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[3]{-1} = -1$. Da mudança de variável $x = y^{15}$, escrevemos:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{1 + \sqrt[3]{x}} = \lim_{y\to -1} \frac{y^3 + 1}{1 + y^5} = \lim_{y\to -1} \frac{(y+1)(y^2 - y + 1)}{(y+1)(y^4 - y^3 + y^2 - y + 1)} = \lim_{y\to -1} \frac{y^2 - y + 1}{y^4 - y^3 + y^2 - y + 1} = \frac{3}{5}.$$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2\text{sen}(4+x^2)}{\sqrt{4+x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}} + \lim\limits_{x\to+\infty} \text{sen}(4+x^2)\cdot\dfrac{2}{\sqrt{4+x^2}} = 0+0$, em que o primeiro zero é $\dfrac{1}{+\infty}$ e o segundo pelo fato em que a função seno é limitada e está multiplicando outra que é infinitésima (teorema do anulamento, mas pode-se fazer com o do sanduíche).

***Q.* 3** (1,5)**.** Escreva a definição de derivada para uma função f num ponto $x=p$. Com esta definição determine a derivada da função $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{3}$, no ponto $p=0$.

Primeiro, cadê o livro?
Segundo,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{0+\Delta x+2}-\sqrt{3}-(\sqrt{0+2}-\sqrt{3})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x+2}-\sqrt{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{\Delta x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{\Delta x+2}+\sqrt{2})}{\Delta x(\sqrt{\Delta x+2}+\sqrt{2})} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

***Q.* 4** (2,0)**.** Determine, se existirem, as assíntotas verticais e horizontais das funções $f(x)=\dfrac{3x^2-x+3}{x^2+2x+2}$ e $g(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x+4}$.

Primeiramente analisaremos f. Como $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\neq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Deste modo não existe número a tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ seja infinito ($k/0$) e, portanto, vemos que f não possui assíntota vetical. Agora, para os limites no infinito abaixo, temos:

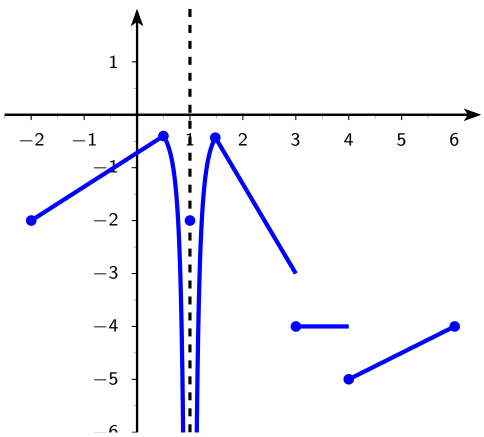
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-x+3}{x^2+2x+2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(3-1/x+3/x^2\right)}{x^2\left(1+2/x+2/x^2\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-1/x+3/x^2}{1+2/x+2/x^2} = \frac{3-0+0}{1+0+0} = 3,$$

daí, a reta $y=3$ é assíntota horixontal de f.
Analisando g, vemos que $g(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{(x-2)^2}$. Como $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^2+1}{(x-2)^2}=\dfrac{21}{(0)^2}=\dfrac{21}{0^+}=+\infty$, temos que a reta $x=2$ é assíntota vertical de g. Por último, concluímos que g não possui assínto horizontal porque os limites no infinito não existem, veja:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(1+1/x^2+1/x^4\right)}{x^2\left(1-4/x+4/x^2\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\cdot\frac{1+1/x^2+1/x^4}{1-4/x+4/x^2} = +\infty\cdot\frac{1+0+0}{1-0+0} = +\infty.$$

***Q.* 5** (1,0)**.** Exiba o gráfico de uma função $f:[-2,6]\to\mathbb{R}^*_-$ tal que:

(1) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -2$
(2) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = -4$
(3) f descontínua em $x=3$
(4) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$
(5) $\nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x)$
(6) $f(4)=-5$



Só isso.

Obrigado!