



UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo I

PROFESSOR: Adriano Cattai

NOME: _____

SEMESTRE: 2013.1

DATA: 19/04/2013

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. A interpretação faz parte da avaliação;
2. Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;
3. Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;
4. Utilize caneta preta ou azul;
5. Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;
6. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
7. Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
8. Nesta folha, escreva apenas seu nome.

"Deus nos concede, a cada dia, uma página de vida nova no livro do tempo. Aquilo que colocarmos nela, corre por nossa conta." (Chico Xavier)

Boa Prova!

Q. 1 (1,2). O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s(t) = 2t^3 + 6t + 2$, em que t é medido em segundos. Com o uso da definição de derivada, encontre a velocidade da partícula no instante $t = 2$.

Como $v(t) = s'(t)$, temos

$$v(2) = s'(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{2t^3 + 6t + 2 - 30}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t - 2)(2t^2 + 4t + 14)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} 2t^2 + 4t + 14 = 30 \text{ m/s}$$

Q. 2 (4,0). Determine cada limite abaixo:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-1}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}^2(x) + \text{sen}^2(x)}{x + \text{sen}(x)}$; (c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{1 + \sqrt[3]{x}}$; (d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^3 + 8}{-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}$.

(a) Observe que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-1}$ é indeterminado $-\infty + \infty$. Reduzindo ao mesmo denominador, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x+1) - 5}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^- \cdot 2} = -\infty.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}^2(x) + \text{sen}^2(x)}{x + \text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(x) \left[\frac{1}{\cos^2(x)} + 1 \right]}{x \left[1 + \frac{\text{sen}(x)}{x} \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x) \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} + 1}{1 + \frac{\text{sen}(x)}{x}} = 0 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = 0;$$

(c) Claramente que $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{1 + \sqrt[3]{x}}$ é indeterminado $0/0$, pois $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[3]{-1} = -1$. Da mudança de variável $x = y^{15}$, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{1 + \sqrt[3]{x}} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y^3 + 1}{1 + y^5} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{(y+1)(y^2 - y + 1)}{(y+1)(y^4 - y^3 + y^2 - y + 1)} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y^2 - y + 1}{y^4 - y^3 + y^2 - y + 1} = \frac{3}{5}.$$

(d) Note que o $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^3 + 8}{-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}$ é indeterminado, pois $-2^3 + 8 = 0$ e $-1/2 + 1/2 = 0$. Escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^3 + 8}{-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{\frac{x-2}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 2} -2x(4+2x+x^2) = -48.$$

Q. 3 (1,6). Determine o $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\text{sen}(4 + x^2)}{\sqrt{4 + x^2}}$ por dois métodos:
 (a) teorema do anulamento e (b) teorema do sanduíche.

(a) Pelo anulamento, temos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\text{sen}(4 + x^2)}{\sqrt{4 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sen}(4 + x^2) \cdot \frac{2}{\sqrt{4 + x^2}} = 0 + 0$, em que o primeiro zero é $\frac{1}{+\infty}$ e o segundo pelo fato em que a função seno é limitada e está multiplicando outra que tende a zero.

(b) Pelo sanduíche, sabendo que $-1 \leq \text{sen}(4 + x^2) \leq 1$, temos $-2 \leq 2 \cdot \text{sen}(4 + x^2) \leq 2$ e $-1 \leq 1 + 2 \cdot \text{sen}(4 + x^2) \leq 3$. Dividindo, esta última, por $\sqrt{4 + x^2}$, temos:

$$\frac{-1}{\sqrt{4 + x^2}} \leq \frac{1 + 2\text{sen}(4 + x^2)}{\sqrt{4 + x^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{4 + x^2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{4 + x^2}} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\text{sen}(4 + x^2)}{\sqrt{4 + x^2}} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\text{sen}(4 + x^2)}{\sqrt{4 + x^2}} \leq 0$$

Logo, concluímos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\text{sen}(4 + x^2)}{\sqrt{4 + x^2}} = 0$.

Q. 4 (2,0). Determine, se existirem, as assíntotas verticais e horizontais das funções $f(x) = \frac{3x^2 - x + 3}{x^2 + 2x + 2}$ e $g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x + 4}$.

Primeiramente analisaremos f . Como $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Deste modo não existe número a tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ seja infinito ($k/0$) e, portanto, vemos que f não possui assíntota vetical. Agora, no infinito, temos:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x + 3}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(3 - 1/x + 3/x^2)}{x^2(1 + 2/x + 2/x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - 1/x + 3/x^2}{1 + 2/x + 2/x^2} = \frac{3 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 3,$$

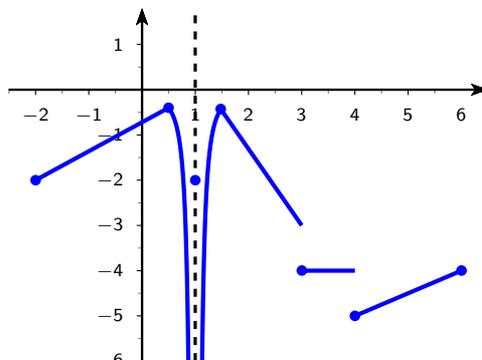
daí, a reta $y = 3$ é assíntota horizontal de f .

Analisando g , vemos que $g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x - 2)^2}$. Como $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x - 2)^2} = \frac{21}{(0)^2} = \frac{21}{0^+} = +\infty$, temos que a reta $x = 2$ é assíntota vertical de g . Por último, concluímos que g não possui assíntota horizontal porque os limites no infinito não existem, veja:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4(1 + 1/x^2 + 1/x^4)}{x^2(1 - 4/x + 4/x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \cdot \frac{1 + 1/x^2 + 1/x^4}{1 - 4/x + 4/x^2} = +\infty \cdot \frac{1 + 0 + 0}{1 - 0 + 0} = +\infty.$$

Q. 5 (1,2). Exiba o gráfico de uma função $f : [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}_*$ tal que:

- | | | |
|---|---|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2$ | (3) f descontínua em $x = 3$ | (5) $\nexists \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ |
| (2) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = -4$ | (4) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ | (6) $f(4) = -5$ |



Só isso.
Obrigado!