UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo I — SEMESTRE: 2013.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* — DATA: 18/04/2013

NOME: ____

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

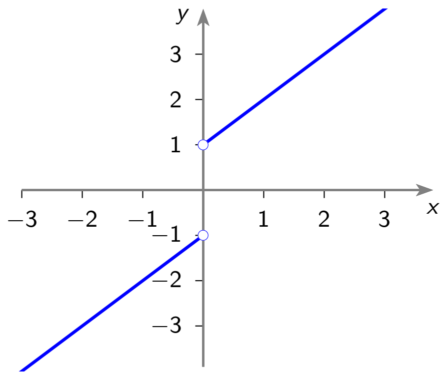
1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Deus nos concede, a cada dia, uma página de vida nova no livro do tempo. Aquilo que colocarmos nela, corre por nossa conta." (Chico Xavier)

Boa Prova!

Q.* 1** (1,5).*** Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x}$, exiba seu gráfico e estude a continuidade de f.

Aqui, devemos ter $x \neq 0$ e, como $|x| = x$, $\forall\, x > 0$ e $|x| = -x$, $\forall\, x < 0$, seque que $f(x) = x + 1$ se $x > 0$ e $f(x) = x - 1$ se $x < 0$. Deste modo, temos duas semiretas, como mostra o gráfico ao lado.



De posse do gráfico, vemos que o limite em zero não existe (laterais diferentes), pois o direito é igual a 1 e o esquerdo é igual -1. E, como o zero não pertence ao domínio de f, não podemos dizer que f é descontínua neste ponto. Logo f é contínua.

Q.* 2** (4,0).*** Determine cada limite abaixo:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-1}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{x+\operatorname{sen}(x)}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to5} \frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x^2-10x+25}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to3} \exp\left(\frac{|2x-6|}{x^2-9}\right)$.

Entenda que, $\exp(\heartsuit) = e^{\heartsuit}$

(a) Observe que $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-1}$ é indeterminado $-\infty + \infty$. Reduzindo ao mesmo denominador, temos:

$$\lim_{x\to1^-} \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{3(x+1)-5}{x^2-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{3x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^-\cdot 2} = -\infty.$$

(b) $$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{x+\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)\left[\dfrac{1}{\cos^2(x)}+1\right]}{x\left[1+\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]} = \lim_{x\to0} \operatorname{sen}(x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{\dfrac{1}{\cos^2(x)}+1}{1+\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}} = 0\cdot1\cdot\frac{2}{2} = 0;$$

(c) Veja, claramente, que $\displaystyle\lim_{x\to5} \frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x^2-10x+25}$ é indeterminado $0/0$ e que $(x-5)^2 = x^2-10x+25$. Assim, mudando a variável $x+3 = y^3$, com $y \to 2$, temos:

$$\lim_{x\to5} \frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x^2-10x+25} = \lim_{y\to2} \frac{y-2}{(y^3-8)^2} = \lim_{y\to2} \frac{y-2}{(y-2)^2(y^2+2y+4)^2} = \lim_{y\to2} \frac{1}{(y-2)(y^2+2y+4)^2} = \frac{1}{0\cdot144} = \frac{1}{0}.$$

Analisando os limites laterais, temos:

$$\lim_{y\to 2^-}\frac{1}{(y-2)(y^2+2y+4)^2}=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 2^+}\frac{1}{(y-2)(y^2+2y+4)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty.$$

(d) Note que $\lim_{x\to 3}\frac{|2x-6|}{x^2-9}$ é indeterminado $0/0$ pois $|2\cdot 3-6|=0$ e $3^2-9=0$. Como $|2x-6|=2|x-3|=2(x-3)$ se $x\geq 3$ e $|2x-6|=2|x-3|=-2(x-3)$ se $x<3$, então

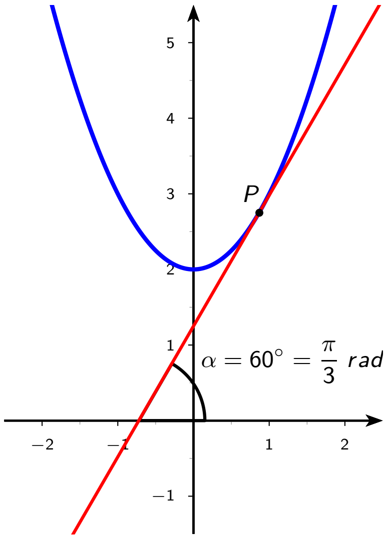
$$\frac{|2x-6|}{x^2-9}=\begin{cases}\dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}, & x\geq 3\\[2mm] \dfrac{-2(x-3)}{(x-3)(x+3)}, & x<3\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{x+3}, & x\geq 3\\[2mm] \dfrac{-2}{x+3}, & x<3\end{cases}.$$

Daí, $\lim_{x\to 3^-}\exp\left(\frac{|2x-6|}{x^2-9}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 3^-}\frac{-2}{x+3}\right)=e^{-1/3}$ e $\lim_{x\to 3^+}\exp\left(\frac{|2x-6|}{x^2-9}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{x+3}\right)=e^{1/3}$. Portanto, não existe $\lim_{x\to 3}\exp\left(\frac{|2x-6|}{x^2-9}\right)$.

Q. 3 (1,5)**.** Determine o ponto da curva $y=2+x^2$ em que a reta tangente tem ângulo de inclinação $\frac{\pi}{3}$. Faça o esboço gráfico.

Pela definição de derivada, no ponto x_0, temos:

$$f'(x_p)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_p+\Delta x)-f(x_p)}{\Delta x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}.$$



Calculando o Δy, temos:

$$f(x_p+\Delta x)-f(x_p)=2+(x_p+\Delta x)^2-[2+x_p^2]=\Delta x(2x_p+\Delta x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_p+\Delta x)-f(x_p)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x_p+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}2x_p+\Delta x=2x_p.\end{aligned}$$

Ou seja, $x_p=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $y_p=2+x_p^2=2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$.
Portanto, o ponto da curva $y=2+x^2$ em que a reta tangente tem ângulo de inclinação $\frac{\pi}{3}$ é $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{11}{4}\right)$.

Agora, usando as regras de derivação, temos $f'(x)=0+2x=2x$ que, no ponto x_p, $f'(x_p)=2x_p=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$. Donde, $x_p=\frac{\sqrt{3}}{2}$. O resto está feito acima.

Q. 4 (1,0)**.** Determine a derivada de $f(x)=\frac{3}{5x}+2x\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{\sqrt{x}}$.

Primeiramente veja que $f(x)=\frac{3}{5x}+2x\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3}{5}\cdot x^{-1}+2\cdot x^{8/5}+3\cdot x^{-1/2}$. Assim,

$$f'(x)=-\frac{3}{5}\cdot x^{-1-1}+\frac{16}{5}\cdot x^{8/5-1}-\frac{3}{2}\cdot x^{-1/2-1}=-\frac{3}{5x^2}+\frac{16\sqrt[5]{x^3}}{5}-\frac{3}{2\sqrt{x^3}}.$$

Q. 5 (1,0)**.** Determine, se existirem, as assíntotas verticais e horizontais de $g(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x + 4}$.

Analisando g, vemos que $g(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{(x-2)^2}$. Como $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{(x-2)^2} = \dfrac{21}{(0)^2} = \dfrac{21}{0^+} = +\infty$, temos que a reta $x = 2$ é assíntota vertical de g. Por último, concluímos que g não possui assínto horizontal porque os limites no infinito não existem, veja:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4\left(1 + 1/x^2 + 1/x^4\right)}{x^2\left(1 - 4/x + 4/x^2\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \cdot \frac{1 + 1/x^2 + 1/x^4}{1 - 4/x + 4/x^2} = +\infty \cdot \frac{1+0+0}{1-0+0} = +\infty.$$

Q. 6 (1,0)**.** Exiba o gráfico de uma função $f : [-2, 6] \to \mathbb{R}^*_-$ tal que:

(1) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -2$

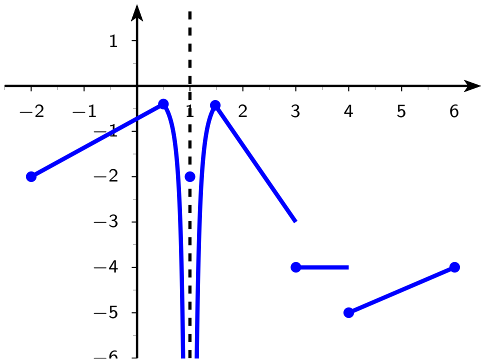
(2) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = -4$

(3) f descontínua em $x = 3$

(4) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

(5) $\nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x)$

(6) $f(4) = -5$



Só isso.

Obrigado!