UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (ECI001 – EC-MR02) SEMESTRE: 2012.2

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 25/09/2012

NOME: ____

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Nunca ande somente pelo caminho traçado, pois ele conduz somente até onde os outros já foram." (Graham Bell)

Boa Prova!

Q.* 1** (1,5).*** Suponha que num mundo tridimensional, Espaçolândia, os habitantes tenham a forma de poliedros convexos e que o número de faces indica a posição social dos indivíduos. A nobreza é diretamente proporcional ao número de faces. Deste modo, com a noção e a notação adequada de limites, descreva a forma do indivíduo da mais alta nobreza e indique o indivíduo mais pobre deste planeta.

Denotamos por $P(n)$ o indíviduo deste mundo, em que $n \in \{4, 5, 6, \dots\}$ indica a quantidade de faces. O indivíduo mais pobre é $P(4)$, que é o Tetraedro ou a pirâmide de base triangular. Podemos, enquanto à nobreza, escrever

$$P(4) < P(5) < P(6) < P(7) < P(8) < \dots < P(n) < \dots$$

Note que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = +\infty$, indicando que não existe um indivíduo da mais alta nobreza. No entanto, em termos geométricos, supondo que possa existir tal indivíduo este deverá ter forma "muito" próxima à esfera. A esfera é o limite da mais alta nobreza, simbolicamente $\lim\limits_{n\to+\infty}$ " forma de" $P(n) =$ esfera.

Q.* 2** (3,2).*** Avalie, cada limite abaixo:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to5} \frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x^2-10x+25}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^3}{[1-\cos(x)]\text{sen}(x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2+3\text{sen}(4+x^2)}{\sqrt{4+x^2}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \log_2\left[\frac{8x^3+8x^2-8x-8}{3x^3+7x^2+5x+1}\right]$

(a) Veja, claramente, que $\displaystyle\lim_{x\to5} \frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x^2-10x+25}$ é indeterminado $0/0$ e que $(x-5)^2 = x^2-10x+25$. Assim, mudando a variável $x+3=y^3$, com $y\to2$, temos:

$$\lim_{x\to5} \frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x^2-10x+25} = \lim_{y\to2} \frac{y-2}{(y^3-8)^2} = \lim_{y\to2} \frac{y-2}{(y-2)^2(y^2+2y+4)^2} = \lim_{y\to2} \frac{1}{(y-2)(y^2+2y+4)^2} = \frac{1}{0\cdot144} = \frac{1}{0}.$$

Analisando os limites laterais, temos:

$$\lim_{y\to2^-} \frac{1}{(y-2)(y^2+2y+4)^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y\to2^+} \frac{1}{(y-2)(y^2+2y+4)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

(b) Veja, claramente, que $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^3}{[1-\cos(x)]\text{sen}(x)}$ é indeterminado $0/0$ e que $\displaystyle\frac{x^3}{[1-\cos(x)]\text{sen}(x)} = \frac{1}{\frac{[1-\cos(x)]\text{sen}(x)}{x^3}}$.

Assim, basta determinar o limite de $\displaystyle\frac{[1-\cos(x)]\text{sen}(x)}{x^3}$. Vamos lá!

$$\lim_{x\to0} \frac{[1-\cos(x)][1+\cos(x)]}{x^2\cdot[1+\cos(x)]} \cdot \lim_{x\to0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2\cdot[1+\cos(x)]} \cdot 1 = \lim_{x\to0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \lim_{x\to0} \frac{1}{1+\cos(x)} = 1^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Logo, o limite inicial é igual a dois.

(c) Pelo teorema do anulamento este limite é zero, pois:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3\mathrm{sen}(4+x^2)}{\sqrt{4+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{4+x^2}}\cdot\mathrm{sen}(4+x^2)=0+0=0.$$

Nsta última, a primeira parcela é zero pois é $2/\infty$ e, a segunda é o produto entre a função limitada seno e outra que tende a zero.

(d) Note que $\lim\limits_{x\to-1}\log_2\left[\dfrac{8x^3+8x^2-8x-8}{3x^3+7x^2+5x+1}\right]=\log_2\left[\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{8x^3+8x^2-8x-8}{3x^3+7x^2+5x+1}\right]$ e que $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{8x^3+8x^2-8x-8}{3x^3+7x^2+5x+1}$ é indeterminado $0/0$. Fatorando, estes polinômios, temos:

$$\lim_{x\to-1}\frac{8x^3+8x^2-8x-8}{3x^3+7x^2+5x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{8(x-1)(x+1)^2}{(3x+1)(x+1)^2}=\lim_{x\to-1}\frac{8(x-1)}{3x+1}=\frac{8\cdot(-2)}{-2}=8.$$

Logo, $\lim\limits_{x\to-1}\log_2\left[\dfrac{8x^3+8x^2-8x-8}{3x^3+7x^2+5x+1}\right]=\log_2[8]=3.$

Q.* 3** (2,8).*** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Se f é uma função contínua para todo $x\neq 0$ com $f(0)=1$, então $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$;

(b) Se $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=3,999$ e $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=4,001$, então $\lim\limits_{x\to1}f(x)=4$;

(c) Se $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{2-f(x)}{x-9}$ é finito, então $\lim\limits_{x\to9}f(x)$ é igual a qualquer número, por exemplo 9;

(d) O $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}$ não existe.

(a) Falso. Se fosse verdade que $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$, então f seria contínua em zero;

(b) Falso. Como os limites laterais são diferentes, então o limite bilateral $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ não existe;

(c) Falso. Como $\lim\limits_{x\to9}x-9=0$, precisamos que $\lim\limits_{x\to9}2-f(x)$ seja também nulo, para evitar a impossibilidade $k/0$, dando limite infinito. Logo $\lim\limits_{x\to9}f(x)=2$;

(d) Falso. Pelo teorema do anulamento este limite é zero, pois $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\mathrm{sen}(x)=0$, visto que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ e a função seno é limitada.

Q.* 4** (1,0).*** Considerando as equações (♣) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=5$ e (★) $\lim\limits_{x\to7}f(x)=+\infty$, escreva:

(a) Como se lê (♣) e (★);

(b) o significado de (♣) e (★).

Integrando os itens, temos:

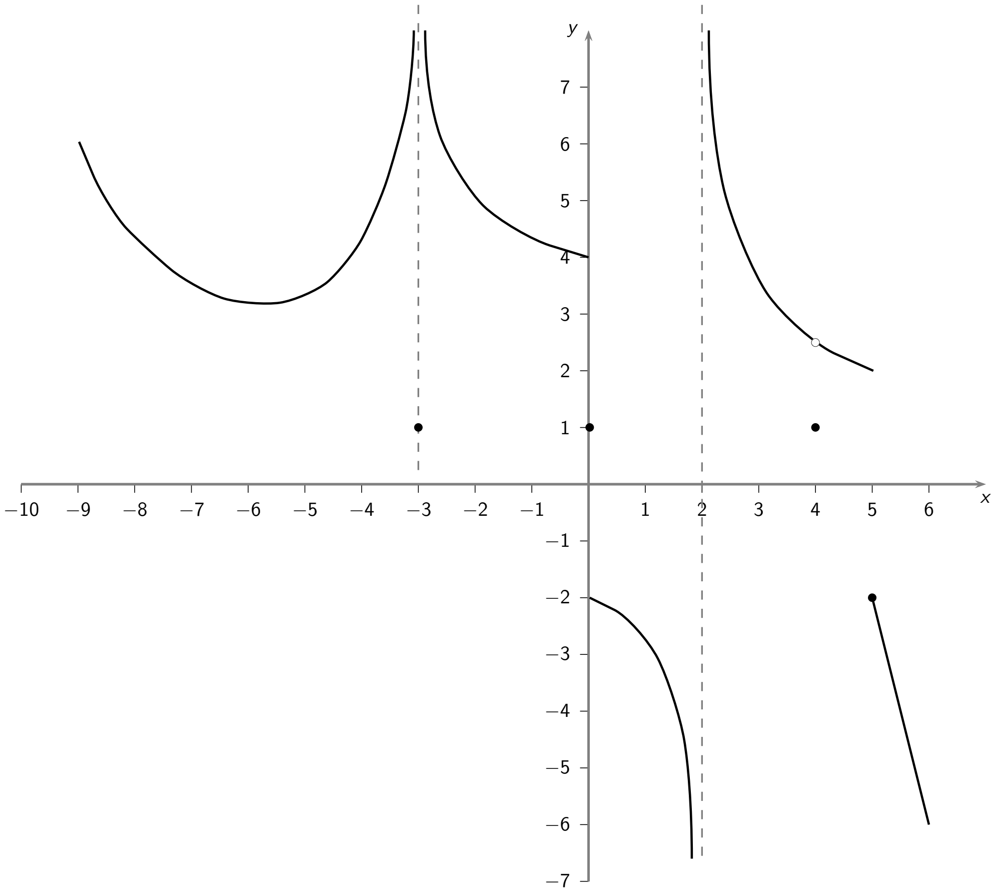
Para o limite dado em (♣): "o limite da função f, quando x tende a dois, é igual a cinco", nos dizendo que à medida em que x assumir valores cada vez mais próximos a dois a função assumirá valores cada vez mais próximo a cinco.

Por último, não menos importante, para o limite dado em (★) lemos "o limite da função f, quando x tende a sete, é igual a mais infinito", nos dizendo que à medida que x assumir valores cada vez mais próximo de sete a função crescerá sem limite.

Q. 5 (1,5). Exiba o esboço gráfico de uma função $f : [-9, 6] \to \mathbb{R}^*$ tal que atenda a todos os itens abaixo:

(a) $\lim_{x\to -9^+} f(x) = 6$ (c) $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ (g) $\lim_{x\to 4} f(x) > 0$

(b) $\lim_{x\to -3} f(x) = +\infty$ (d) $\lim_{x\to 6^-} f(x) = -6$ (f) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ (h) f descontínua em $x = 4$



Só isso! Muito obrigado.