UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (ECP001 – ES-MR01) SEMESTRE: 2012.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 18/05/2012

NOME: ____

2ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Assustar-se com as notícias produzidas pelo mundo é muito fácil, porém, entender o que está por trás dessas requer um esforço intelectual que nem todas as pessoas estão dispostas a empreender." (Emerson Natal)

Boa Prova!

Q.* 1** (1,0+1,0).*** Simplificando ao máximo, obtenha a derivada de cada dunção abaixo:

(a) $y = x^2 \cdot e^x \cdot \operatorname{sen}(x)$ (b) $y = \ln\left[\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right]$

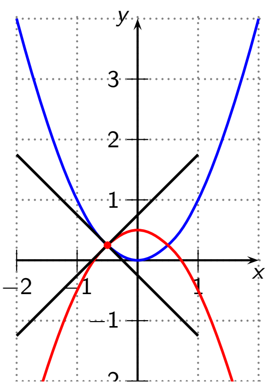
(a) $y' = [x^2 \cdot e^x \cdot \operatorname{sen}(x)]' = [x^2 \cdot e^x]' \cdot \operatorname{sen}(x) + x^2 \cdot e^x \cdot [\operatorname{sen}(x)]' = [2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x] \cdot \operatorname{sen}(x) + x^2 \cdot e^x \cdot \cos(x) = 2xe^x\operatorname{sen}(x) + x^2e^x\operatorname{sen}(x) + x^2e^x\cos(x)$;

(b) Como $y = \ln\left[\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right] = \dfrac{1}{2}[\ln(x-1) - \ln(x+1)]$, temos:

$$y' = \frac{1}{2}[\ln(x-1) - \ln(x+1)]' = \frac{1}{2}\left([\ln(x-1)]' - [\ln(x+1)]'\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\cdot 1 - \frac{1}{x+1}\cdot 1\right) = \frac{1}{x^2-1}.$$

Q.* 2** (1,4).*** Seja P o ponto de interseção dos gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{1}{2} - x^2$, de abscissa negativa. Escreva a definição de derivada num ponto e, com ela, determine as equações da reta tangente e da normal, no ponto P. Num mesmo sistema de oordenadas, exiba o esboço gráfico das funções e das retas.

Resolvendo o sistema $S : \{y = x^2$ e $y = 1/2 - x^2\}$ obtemos $x = -1/2$ ou $x = 1/2$. Assim, $P(-1/2; 1/4)$. A definição de derivada de uma função f, num ponto x_p, é $f'(x_p) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_p + \Delta x) - f(x_p)}{\Delta x}$.



Para $x_p = -1/2$ temos $f(-1/2) = 1/4$, $f(-1/2 + \Delta x) = (-1/2 + \Delta x)^2 = (\Delta x)^2 - \Delta x + 1/4$ e

$$\begin{aligned} a_t &= f'(-1/2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 - \Delta x + 1/4 - 1/4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x - 1 = -1. \end{aligned}$$

Como $a_n \cdot a_t = -1$, então $a_n = 1$. As equações da reta tangente e da reta normal, respectivamente, são $t : y - 1/4 = -1(x + 1/2)$ e $n : y - 1/4 = 1(x + 1/2)$ ou $t : 4y + 4x + 1 = 0$ e $n : 4y - 4x = 3$.

Q.* 3** (2,4).*** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Toda função contínua é suave;

(b) Se $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ então $[\cosh(x)]' = \operatorname{senh}(x)$;

(c) Se $y'' = [y']'$ e $y = f \cdot g$, então $[f \cdot g]'' = f''g + 2f'g' + fg''$;

(d) A função $g(x) = \dfrac{1}{x}$ possui uma única primitiva.

(a) Falso. Veja que a função $f(x) = |x|$ é contínua e não é suave em $x = 0$. Neste ponto as derivadas laterais são diferentes ($f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$) e o gráfico apresenta uma "quina";

(b) Verdadeiro. Como $[e^x]' = e^x$ e $[e^{-x}]' = -e^{-x}$, temos

$$[\cosh(x)]' = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x);$$

(c) Verdadeiro. Como $[fg]' = f'g + fg'$, temos:

$$[fg]'' = [f'g + fg']' = [f'g]' + [fg']' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

(d) Falso. A função g admite, além da primitiva $y = \ln(x)$, uma família de primitivas da forma $f(x) = \ln(x) + K$, em que $K \in \mathbb{R}$, pois $f'(x) = [\ln(x) + K]' = \dfrac{1}{x} + 0 = \dfrac{1}{x}$.

Q.* 4** (0,6+2,4).*** Para a função $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$, determine:

(a) Os pontos em que a reta tangente t, ao gráfico de f, seja horizontal;

(b) As equações das retas no item (a);

(c) Os intervalos de crescimento e os de decrescimento de f;

(d) A equação da reta normal ao gráfico de f no ponto em que $x = 1$.

Pela derivada do quociente, temos:

$$f'(x) = \frac{[2x^3]' \cdot (x^2 - 4) - 2x^3 \cdot [x^2 - 4]'}{(x^2 - 4)^2} = \frac{6x^2 \cdot (x^2 - 4) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2};$$

(a) A reta t será horizontal quando $f'(x) = 0$, ou seja, nos pontos em que $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{12}$;

(b) Para $x = 0$, temos $y = 0$ e $t : y = 0$ (eixo-x); para $x = \sqrt{12}$, temos $y = 6\sqrt{2}$ e $t : y = 6\sqrt{2}$; para $x = -\sqrt{12}$, temos $y = -6\sqrt{2}$ e $t : y = -6\sqrt{2}$;

(c) A função f será crescente quando f' for positiva e, f será decrescente quando f' for negativa. O quadro abaixo apresenta o estudo de sinal da derivada f' e, consequentemente, também a monotonicidade de f.

	$(-\infty, -\sqrt{12})$	$(-\sqrt{12}, 0)$	$(0, \sqrt{12})$	$(\sqrt{12}, +\infty)$
$2x^2$	+	+	+	+
$x^2 - 12$	+	−	−	+
$(x^2 - 4)^2$	+	+	+	+
f'	+	−	−	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$-\sqrt{12}$ 0 $\sqrt{12}$

◇ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ é crescente $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

◇ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ é decrescente $\Leftrightarrow x \in (-\sqrt{12}, \sqrt{12})$

(d) Para $x = -1$, temos $f(-1) = \dfrac{2}{3}$ e $a_t = f'(-1) = -\dfrac{22}{9}$. Assim $a_n = \dfrac{9}{22}$ e, portanto, $n : y - \dfrac{2}{3} = \dfrac{9}{22}(x + 1)$.

Q.* 5** (1,2).*** Complete as tabelas, sabendo que u, v e $\clubsuit$ representam funções em x, e $n \in \mathbb{R}$.

Primitiva	Derivada
n	0
x	1
$\clubsuit^n$	$n \cdot \clubsuit^{n-1} \cdot \clubsuit'$
$v \cdot u$	$v' \cdot u + u' \cdot v$
$\ln(\clubsuit)$	$\clubsuit'/\clubsuit$
$\operatorname{sen}(\clubsuit) + \cos(x)$	$\cos(\clubsuit) \cdot \clubsuit' - \operatorname{sen}(x)$

Primitiva	Derivada
$\sec(x)$	$\sec(x)\operatorname{tg}(x)$
$-\operatorname{cotg}(x)$	$\operatorname{cossec}^2(x)$
$\operatorname{tg}(\clubsuit)$	$\sec^2(\clubsuit) \cdot \clubsuit'$
$2^\clubsuit$	$2^\clubsuit \cdot \ln(2) \cdot \clubsuit'$
$-\operatorname{cossec}(x)$	$\operatorname{cossec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x)$
u/v	$(u'v - vu')/v^2$