UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EMT001 – ER-MR01) SEMESTRE: 2012.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 13/04/2012

NOME: ____

1^a AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Justifique suas respostas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Seja humilde, pois, até o sol com toda sua grandeza se põe e deixa a lua brilhar." (Bob Marley)

Boa Prova!

Q. 1 (2,0)***.*** Para as funções $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3}}$ e $g(x)=\dfrac{1-x^2}{-x^2-2x+3}$, determine as assíntotas verticais e horizontais, caso existirem. Após, exiba o esboço gráfico ilustrando o comportamento da função em torno das assíntotas.

Uma função admite assíntota vertical $x=a$ se um dos limites laterais em a for infinito. Como f e g são quocientes entre outras funções, vamos buscar os números que anulem o denominador e não anulem o numerador. Para f, percebemos que não há assíntota vertical pois $x^2+3\neq 0$ para todo x real e, para g, temos $3-2x-x^2=0$ se, e somente se, $x=-3$ ou $x=1$. Daí, percebendo que $g(x)=\dfrac{(1-x)(1+x)}{-(x+3)(x-1)}=\dfrac{1+x}{x+3}$, vemos que $x=1$ não é assíntota vertical, sobrando apenas $x=-3$. Os limites laterais, neste ponto, são:

$$\lim_{x\to-3^-} g(x)=\lim_{x\to-3^-}\frac{1+x}{x+3}=\frac{-2}{0^-}=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-3^+} g(x)=\lim_{x\to-3^+}\frac{1+x}{x+3}=\frac{-2}{0^+}=-\infty.$$

Moral 1: f não possui assíntota vertical e g possui, uma única, a reta $x=-3$, conforme os limites acima.

Agora, para uma função possuir assíntota horizontal, é preciso que o limite infinito seja finito. Ajustando as funções para o limite infinito, temos:

$$\diamond\ f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{3x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=\frac{3x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=\frac{3x}{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}},$$

$$\diamond\ g(x)=\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{\frac{1}{x^2}-1}{-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

Assim, para f temos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=3 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=-3.$$

E, para g, segue-se que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=1.$

Moral 2: as retas $y=3$ e $y=-3$ são assíntotas horizontais para o gráfico de f e a reta $y=1$ para o gráfico de g.

Q. 2 (3,2)**.** Avalie cada limite abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-4x^2-x+12}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(6x)\operatorname{tg}(8x)}{\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)}$

(a) Como $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2-4 = 0$, então $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$ é indeterminado $0/0$. Fatorando e simplificando, temos:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}(x+2)} = \frac{1}{0^+\cdot 4} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

(b) Esse é moleza: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-4x^2-x+12} = \dfrac{2-3+1}{3-4-1+12} = \dfrac{0}{10} = 0.$

(c) O limite é apresenta indeterminações $\infty-\infty$. Multiplicando e dividindo pelo conjugado, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x} &= \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}} = \frac{x^2+x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}\\ &= \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}.\end{aligned}$$

Para $x>0$, $|x|=x$. Assim, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 1.$$

(d) O $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(6x)\operatorname{tg}(8x)}{\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)}$ é indeterminado $0/0$. Vamos ajustar para poder usar o limite fundamental trigonométrico.

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}(6x)\operatorname{tg}(8x)}{\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)} &= \frac{\operatorname{sen}(6x)}{\cos(6x)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(8x)}{\cos(8x)}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}(3x)}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}(5x)} = \frac{\operatorname{sen}(6x)}{\operatorname{sen}(3x)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(8x)}{\operatorname{sen}(5x)}\cdot\frac{1}{\cos(6x)}\cdot\frac{1}{\cos(8x)}\\ &= \frac{6\cdot\frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x}}{3\cdot\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}\cdot\frac{8\cdot\frac{\operatorname{sen}(8x)}{8x}}{5\cdot\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}}\cdot\frac{1}{\cos(6x)}\cdot\frac{1}{\cos(8x)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(6x)\operatorname{tg}(8x)}{\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{6\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x}}{3\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}\cdot\frac{8\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{\operatorname{sen}(8x)}{8x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(6x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(8x)} = \frac{6\cdot 1\cdot 8\cdot 1}{3\cdot 1\cdot 5\cdot 1}\cdot 1\cdot 1 = \frac{16}{5}.$$

Q. 3 (2,8)**.** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Se $f(x)<0$ para todo $x\neq -2$ e $f(-2)=2$, então $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ é negativo;

(b) Se uma função f muda de sinal quando x varia de um ponto $x=a$ para o ponto $x=b$, então existirá, obrigatoriamente, um ponto entre a e b em que a função f se anula;

(c) Se $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x\cdot f(x)-2}{x^2-4x+4}$ é finito, então $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ é igual a qualquer número;

(d) O $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{4-x}$ não existe.

(a) Falso. Talvez este limite nem exista, como é o caso se $f(x) = \begin{cases} -1, & x < -2 \\ 2, & x = -2 \\ -2, & x > -2 \end{cases}$

(b) Se a função fosse contínua no intervalo $[a, b]$, pelo TVI garantiríamos a existência deste c. Como nada foi dito, a afirmativa é falsa. Tome como exemplo a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$ com $f(0) = 2$ e, $a = -1$ e $b = 1$.

(c) Falso. Para que $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x \cdot f(x) - 2}{x^2 - 4x + 4}$ seja finito, é preciso que $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{3}$, evitando uma impossibilidade $k/0$.

(d) Verdadeiro, pois não existe $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} \sqrt{4 - x}$ $(? = \sqrt{0^-})$.

Q. 4 **(1,0).** Seja $a_n \cdot x^n$ o monômio de maior grau do polinômio $p_n(x)$. Use exemplos para ilustrar que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} p_n(x)$ é determinado apenas por $a_n x^n$, ou seja, que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} p_n(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$.

Primeiramente, consideremos a função g da questão 1:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^2}{-x^2 - 2x + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)}{x^2\left(-1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2} - 1}{-1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}} = \frac{0 - 1}{-1 - 0 + 0} = 1.$$

Ou: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 - 2x^2 - 1 = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = (-\infty)^3 \cdot (1 - 0 - 0) = -\infty.$

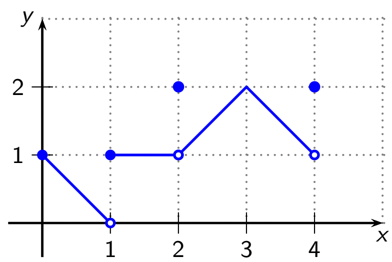
Desta forma ilustramos que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} p_n(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$. Diretamente, podemos resolver estes dois exemplos assim:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^2}{-x^2 - 2x + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{-x^2} \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 - 2x^2 - 1 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

Q. 5 **(1,0).** Exiba o esboço gráfico da função $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ dada ao lado. Determine os limites laterais em 1, em 2 e em 3. Investigue a continuidade de f.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & se & x \in [0, 1) \\ 1 & se & x \in [1, 2) \\ 2 & se & x = 2 \\ x - 1 & se & x \in (2, 3) \\ 5 - x & se & x \in [3, 4) \\ 2 & se & x = 4 \end{cases}$$

A partir do gráfico, ao lado, temos:



$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x) \\
&\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 1 \neq 2 = f(2) \\
&\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = 2 = f(3) \\
&\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1 \neq 2 = f(4)
\end{aligned}$$

Logo, f não é contínua nos pontos $x = 1$, $x = 2$ e $x = 4$. Neste último, f não é contínua à esquerda.

Só isso! Muito obrigado.