UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (ECI001 – EC-NR06) SEMESTRE: 2012.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 17/04/2012

NOME: ____

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Justifique suas respostas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Seja humilde, pois, até o sol com toda sua grandeza se põe e deixa a lua brilhar." (Bob Marley)

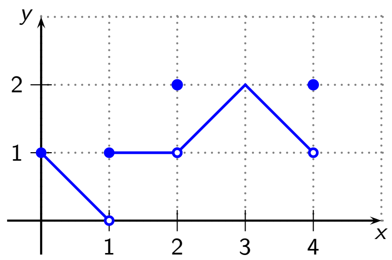
Boa Prova!

***Q.* 1** (1,0)**.** Exiba o esboço gráfico da função $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ dada ao lado. Determine os limites laterais em 1, em 2 e em 3. Investigue a continuidade de f.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & se \quad x \in [0,1) \\ 1 & se \quad x \in [1,2) \\ x-1 & se \quad x \in (2,3) \\ 5-x & se \quad x \in [3,4) \\ 2 & se \quad x \in \{2,4\} \end{cases}$$

A partir do gráfico, ao lado, temos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 1 \neq 2 = f(2)$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = 2 = f(3)$$
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1 \neq 2 = f(4)$$



Logo, f não é contínua nos pontos $x=1$, $x=2$ e $x=4$. Neste último, f não é contínua à esquerda.

***Q.* 2** (3,2)**.** Avalie cada limite abaixo:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x - 3\cos(x)}{2^x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{5-5\cos^2(x)}$

(a) Perceba que $\dfrac{2^x - 3\cos(x)}{2^x} = \dfrac{2^x}{2^x} - \dfrac{3\cos(x)}{3^x} = 1 - \dfrac{3}{2^x}\cdot\cos(x)$. Esta última parcela é um produto entre uma infinitésima por uma limitada. Assim, pelo teorema do anulamento, teremos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x - 3\cos(x)}{2^x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{3}{2^x}\cdot\cos(x) = 1 - \lim_{x\to-\infty} \overbrace{\frac{3}{2^x}}^{\to 0}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{limitada} = 1 - 0 = 1.$$

(b) Como $\displaystyle\lim_{x\to 1} 3x^3-4x^2-x+2 = \lim_{x\to 1} 2x^3-3x^2+1 = 0$, temos que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$ é indeterminado $0/0$. Fatorando os polinômios, dividindo-os por $x-1$, temos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(3x+2)}{(x-1)^2(2x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x+2}{2x+1} = \frac{5}{3}.$$

(c) Note que $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ é indeterminado $0/0$. Mudando a variável $x=y^{15}$ e, em seguida fatorando, temos:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}=\lim_{y\to -1}\frac{1+\sqrt[5]{y^{15}}}{1+\sqrt[3]{y^{15}}}=\lim_{y\to -1}\frac{1+y^3}{1+y^5}=\lim_{y\to -1}\frac{(1+y)(y^2-y+1)}{(1+y)(y^4-y^3+y^2-y+1)}=\lim_{y\to -1}\frac{y^2-y+1}{y^4-y^3+y^2-y+1}=\frac{3}{5}.$$

(d) Visto que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{5-5\cos^2(x)}$ é indeterminado $0/0$ e que $1-\cos^2(x)=\operatorname{sen}^2(x)$, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{5-5\cos^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{5(1-5cos^2(x))}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2}=\frac{1}{5}.$$

Q. 3 (2,8)**.** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Se $f(x)>0$ para todo $x\neq 4$ e $f(4)=-1$, então não existe $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$;

(b) Se uma função f muda de sinal quando x varia de um ponto $x=a$ para o ponto $x=b$, então existirá, obrigatoriamente, um ponto entre a e b em que a função f se anula;

(c) Se $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x\cdot f(x)}{x^2-6x+9}$ é finito, então $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ pode ser é igual a qualquer número;

(d) Tanto $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ quanto $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ não existem.

(a) Falso. Talvez este limite nem exista, como é o caso se $f(x)=\begin{cases}1, & x<4\\ -1, & x=4\\ 2, & x>4\end{cases}$.

(b) Se a função fosse contínua no intervalo $[a,b]$, pelo TVI garantiríamos a existência deste c. Como nada foi dito, a afirmativa é falsa. Tome como contra-exemplo a função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se $x\neq 0$ com $f(0)=2$ e, $a=-1$ e $b=1$.

(c) Falso. Para que $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x\cdot f(x)}{x^2-6x+9}$ seja finito, é preciso que $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=3$, evitando uma impossibilidade $k/0$.

(d) Verdadeiro, pois não existe $\lim\limits_{x\to 4^+}\sqrt{4-x}$ $(?=\sqrt{0^-})$.

Q. 4 (1,0)**.** Seja $a_n\cdot x^n$ o monômio de maior grau do polinômio $p_n(x)$. Use exemplos para "mostrar" que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}p_n(x)$ é determinado apenas por a_nx^n, ou seja, que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}p_n(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}a_nx^n$.

Primeiramente, consideremos a função g da questão 1:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{-x^2-2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{0-1}{-1-0+0}=1.$$

Ou: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3-2x^2-1=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)=(-\infty)^3\cdot(1-0-0)=-\infty.$

Desta forma ilustramos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}p_n(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}a_nx^n$. Diretamente, podemos resolver estes dois exemplos assim:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{-x^2-2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{-x^2}\lim_{x\to+\infty}1=1\quad\text{e}\quad\lim_{x\to-\infty}x^3-2x^2-1=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty.$$

Q. 5 (2,0)**.** Para as funções $f(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+5}}$ e $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$, determine as assíntotas verticais e horizontais, caso existirem. Após, exiba o esboço gráfico ilustrando o comportamento da função em torno das assíntotas.

Uma função admite assíntota vertical $x = a$ se um dos limites laterais em a for infinito. Como f e g são quocientes entre outras funções, vamos buscar os números que anulem o denominador e não anulem o numerador. Para f, percebemos que não há assíntota vertical pois $x^2 + 5 \neq 0$ para todo x real e, para g, temos $x^2 - x - 2 = 0$ se, e somente se, $x = -1$ ou $x = 2$. Daí, percebendo que $g(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{x-1}{x-2}$, vemos que $x = -1$ não é assíntota vertical, sobrando apenas $x = 2$. Os limites laterais, neste ponto, são:

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Moral 1: f não possui assíntota vertical e g possui, uma única, a reta $x = 2$, conforme os limites acima.

Agora, para uma função possuir assíntota horizontal, é preciso que o limite infinito seja finito. Ajustando as funções para o limite infinito, temos:

$$\diamond\ f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{5x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}} = \frac{5x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}} = \frac{5x}{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}},$$

$$\diamond\ g(x) = \frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)} = \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}.$$

Assim, para f temos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{x\cdot\sqrt{\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}} = 5 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{-x\cdot\sqrt{\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}} = -5.$$

E, para g, segue-se que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}} = 1.$

Moral 2: as retas $y = 5$ e $y = -5$ são assíntotas horizontais para o gráfico de f e a reta $y = 1$ para o gráfico de g.

Só isso! Muito obrigado.