



UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (ECI001 – EC-MR02)

PROFESSOR: Adriano Cattai

NOME: \_\_\_\_\_

SEMESTRE: 2012.1

DATA: 12/04/2012

### 1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

#### INSTRUÇÕES:

1. A interpretação faz parte da avaliação;
2. Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;
3. Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;
4. Utilize caneta **preta** ou **azul**;
5. Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;
6. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
7. Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
8. Nesta folha, escreva apenas seu nome.

"Seja humilde, pois, até o sol com toda sua grandeza se põe e deixa a lua brilhar." (Bob Marley)

#### Boa Prova!

**Q. 1 (2,0).** Para as funções  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3}}$  e  $g(x) = \frac{1-x^2}{-x^2-2x+3}$ , determine as assíntotas verticais e horizontais, caso existirem. Após, exiba o esboço gráfico ilustrando o comportamento da função em torno das assíntotas.

Uma função admite assíntota vertical  $x = a$  se um dos limites laterais em  $a$  for infinito. Como  $f$  e  $g$  são quocientes entre outras funções, vamos buscar os números que anulem o denominador e não anulem o numerador. Para  $f$ , percebemos que não há assíntota vertical pois  $x^2 + 3 \neq 0$  para todo  $x$  real e, para  $g$ , temos  $3 - 2x - x^2 = 0$  se, e somente se,  $x = -3$  ou  $x = 1$ . Daí, percebendo que  $g(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{-(x+3)(x-1)} = \frac{1+x}{x+3}$ , vemos que  $x = 1$  não é assíntota vertical, sobrando apenas  $x = -3$ . Os limites laterais, neste ponto, são:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1+x}{x+3} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1+x}{x+3} = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$

Moral 1:  $f$  não possui assíntota vertical e  $g$  possui, uma única, a reta  $x = -3$ , conforme os limites acima.

Agora, para uma função possuir assíntota horizontal, é preciso que o limite infinito seja finito. Ajustando as funções para o limite infinito, temos:

$$\begin{aligned} \diamond f(x) &= \frac{3x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}} = \frac{3x}{|x| \cdot \sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}, \\ \diamond g(x) &= \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x^2}-1}{-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}. \end{aligned}$$

Assim, para  $f$  temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x \cdot \sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}} = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-x \cdot \sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}} = -3.$$

E, para  $g$ , segue-se que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1$ .

Moral 2: as retas  $y = 3$  e  $y = -3$  são assíntotas horizontais para o gráfico de  $f$  e a reta  $y = 1$  para o gráfico de  $g$ .

**Q. 2 (3,2).** Avalie, cada limite abaixo:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{4 - \sqrt{16+x}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \sqrt{2x}}{5 - \sqrt{3x}} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(8x)}$$

(a) Podemos reescrever a função:  $\frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x(x+1)^2}$ . Nesta última expressão teremos limite indeterminado, 0/0. Ajustando um pouco mais, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^2 - 1}{x(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{x(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{(x+1)^2} = 2.$$

(b) Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{9+x} - 3 = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} 4 - \sqrt{16+x} = 0$ , o limite desejado é indeterminado, 0/0. Multiplicando e dividindo pelos seus conjugados, temos:

$$\frac{\sqrt{9+x} - 3}{4 - \sqrt{16+x}} = \frac{\sqrt{9+x} - 3}{4 - \sqrt{16+x}} \cdot \frac{\sqrt{9+x} + 3}{\sqrt{9+x} + 3} \cdot \frac{4 + \sqrt{16+x}}{4 + \sqrt{16+x}} = \frac{(9+x-9)(4 + \sqrt{16+x})}{(4 - (4+x))(\sqrt{9+x} + 3)} = \frac{x(4 + \sqrt{16+x})}{-x(\sqrt{9+x} + 3)} = -\frac{4 + \sqrt{16+x}}{\sqrt{9+x} + 3}.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{4 - \sqrt{16+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{4 + \sqrt{16+x}}{\sqrt{9+x} + 3} = -\frac{4}{3}.$$

(c) Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \sqrt{2x}}{5 - \sqrt{3x}}$  é indeterminado,  $\infty/\infty$ . Porém, podemos escrever:

$$\frac{6 + \sqrt{2x}}{5 - \sqrt{3x}} = \frac{\sqrt{x} \left( \frac{6}{\sqrt{x}} + \sqrt{2} \right)}{\sqrt{x} \left( \frac{5}{\sqrt{x}} - \sqrt{3} \right)} = \frac{\frac{6}{\sqrt{x}} + \sqrt{2}}{\frac{5}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}}.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \sqrt{2x}}{5 - \sqrt{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6}{\sqrt{x}} + \sqrt{2}}{\frac{5}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}} = \frac{0 + \sqrt{2}}{0 - \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

(d) Reescrevendo a função, temos:

$$\frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(8x)} = \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(8x)} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} = \frac{\frac{3\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{\frac{8\operatorname{sen}(8x)}{8x}} \cdot \frac{1}{\cos(3x)}.$$

Agora podemos usar o limite trigonométrico fundamental. Portanto, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(8x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{\frac{8\operatorname{sen}(8x)}{8x}} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(8x)}{8x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(3x)} = \frac{3 \cdot 1}{8 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{8}.$$

**Q. 3 (2,8).** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Se  $f(x) < 0$  para todo  $x \neq -2$  e  $f(-2) = 2$ , então  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  é negativo;

(b) Se  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , então existe algum número  $c$ , entre  $a$  e  $b$ , tal que  $f(c) = 0$ ;

(c) Se  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x \cdot f(x) - 2}{x^2 - 4x + 4}$  é finito, então  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  é igual a qualquer número;

(d) O  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{4-x}$  não existe.

(a) Falso. Talvez este limite nem exista, como é o caso se  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < -2 \\ 2, & x = -2 \\ -2, & x > -2 \end{cases}$

(b) Se a função fosse contínua no intervalo  $[a, b]$ , pelo TVI garantiríamos a existência deste  $c$ . Como nada foi dito, a afirmativa é falsa. Tome como exemplo a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  se  $x \neq 0$  com  $f(0) = 2$  e,  $a = -1$  e  $b = 1$ .

(c) Falso. Para que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x \cdot f(x) - 2}{x^2 - 4x + 4}$  seja finito, é preciso que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$ , evitando uma impossibilidade  $k/0$ .

(d) Verdadeiro, pois não existe  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{4-x}$  ( $? = \sqrt{0^-}$ ).

**Q. 4 (1,0).** Seja  $a_n \cdot x^n$  o monômio de maior grau do polinômio  $p_n(x)$ . Use exemplos para ilustrar que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p_n(x)$  é determinado apenas por  $a_n x^n$ , ou seja, que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p_n(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$ .

Primeiramente, consideremos a função  $g$  da questão 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{-x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( \frac{1}{x^2} - 1 \right)}{x^2 \left( -1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{-1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{0 - 1}{-1 - 0 + 0} = 1.$$

Ou:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( 1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = (-\infty)^3 \cdot (1 - 0 - 0) = -\infty.$

Desta forma ilustramos que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p_n(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$ . Diretamente, podemos resolver estes dois exemplos assim:

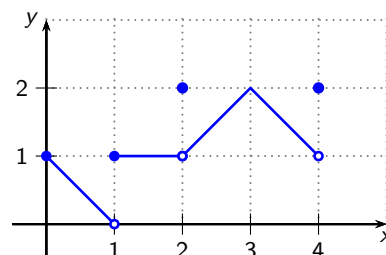
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{-x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{-x^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

**Q. 5 (1,0).** Exiba o esboço gráfico da função  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  dada ao lado. Determine os limites laterais em 1, em 2 e em 3. Investigue a continuidade de  $f$ .

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x \in [1, 2) \\ 2 & \text{se } x = 2 \\ x - 1 & \text{se } x \in (2, 3) \\ 5 - x & \text{se } x \in [3, 4) \\ 2 & \text{se } x = 4 \end{cases}$$

A partir do gráfico, ao lado, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 &\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \neq 2 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1 \neq 2 = f(4) & \end{aligned}$$



Logo,  $f$  não é contínua nos pontos  $x = 1$ ,  $x = 2$  e  $x = 4$ . Neste último,  $f$  não é contínua à esquerda.

*Só isso! Muito obrigado.*

