Universidade Salvador

Disciplina: Cálculo Diferencial (ECI001 – EC-MR01) **Semestre:** 2012.1

Professor: *Adriano Cattai* **Data:** 16/05/2012

Nome: ____

2ª Avaliação da Aprendizagem

Instruções:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Assustar-se com as notícias produzidas pelo mundo é muito fácil, porém, entender o que está por trás dessas requer um esforço intelectual que nem todas as pessoas estão dispostas a empreender." (Emerson Natal)

Boa Prova!

Q. 1 (0,6+2,4)***.*** Para a função $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$, determine:

(a) Os pontos em que a reta tangente t, ao gráfico de f, seja horizontal;

(b) As equações das retas no item (a);

(c) Os intervalos de crescimento e os de decrescimento de f;

(d) A equação da reta normal ao gráfico de f no ponto em que $x = 1$.

Pela derivada do quociente, temos:

$$f'(x) = \frac{[2x^3]'\cdot(x^2-4) - 2x^3\cdot[x^2-4]'}{(x^2-4)^2} = \frac{6x^2\cdot(x^2-4) - 2x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2};$$

(a) A reta t será horizontal quando $f'(x) = 0$, ou seja, nos pontos em que $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{12}$;

(b) Para $x = 0$, temos $y = 0$ e $t : y = 0$ (eixo-x); para $x = \sqrt{12}$, temos $y = 6\sqrt{2}$ e $t : y = 6\sqrt{2}$; para $y = -\sqrt{12}$, temos $y = -6\sqrt{2}$ e $t : y = -6\sqrt{2}$;

(c) A função f será crescente quando f' for positiva e, f será decrescente quando f' for negativa. O quadro abaixo apresenta o estudo de sinal da derivada f' e, consequentemente, também a monotonicidade de f.

	$-\sqrt{12}$	0	$\sqrt{12}$	
$2x^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-12	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x^2-4)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ é crescente $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ é decrescente $\Leftrightarrow x \in (-\sqrt{12}, \sqrt{12})$

$-\sqrt{12}$ $\quad 0 \quad$ $\sqrt{12}$

(d) Para $x = -1$, temos $f(-1) = \dfrac{2}{3}$ e $a_t = f'(-1) = -\dfrac{22}{9}$. Assim $a_n = \dfrac{9}{22}$ e, portanto, $n : y - \dfrac{2}{3} = \dfrac{9}{22}(x+1)$.

Q. 2 (1,0+1,0)***.*** Simplificando ao máximo, obtenha a derivada de cada dunção abaixo:

(a) $y = \sqrt[4]{1 + \mathrm{tg}(2^{1+4x})}$ (b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

(a) $y' = \dfrac{1}{4}\left[1 + \mathrm{tg}(2^{1+4x})\right]^{-3/4} \cdot \left[0 + \sec^2(2^{1+4x})\right] \cdot 2^{1+4x} \cdot \ln(2) \cdot 4 = \dfrac{\ln(2)\cdot 2^{1+4x}\cdot \sec^2(2^{1+4x})}{\sqrt[4]{[1+\mathrm{tg}(2^{1+4x})]^3}};$

(b) veja a 2a lista de exercícios.

Q.* 3** (2,4).*** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Toda função contínua é diferenciável;

(b) Se h é derivável com $h(2) = 4$, $h'(2) = -3$ e $f(x) = \dfrac{h(x)}{x}$, então $f'(2) = -\dfrac{5}{2}$;

(c) A função $f(x) = x \cdot |x - 2|$ é diferenciável em todo $\mathbb{R}$ e $f'(2) = 2$;

(d) A função $g(x) = x^2$ possui uma única primitiva.

(a) Falso. Veja que a função $f(x) = |x|$ é contínua e não é diferenciável em $x = 0$. No ponto em que $x = 0$ as derivadas laterais são diferentes ($f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$) e o gráfico apresenta uma “quina”, neste ponto;

(b) Como $f'(x) = \left[\dfrac{h(x)}{x}\right]' = \dfrac{h'(x) \cdot x - h(x)}{x^2}$, temos que $f'(2) = \dfrac{h'(2) \cdot 2 - h(2)}{2^2} = \dfrac{-6 - 4}{4} = -\dfrac{5}{2}$;

(c) Falso. Não existe $f'(2)$, pois $f'_-(2) = -2$ e $f'_+(2) = 2$, em que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x, & x < 2 \end{cases}$;

(d) Falso. A função g admite, além da primitiva $y = \dfrac{x^3}{3}$, uma família de primitivas da forma $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + K$, em que $K \in \mathbb{R}$, pois $f'(x) = \left[\dfrac{x^3}{3} + K\right]' = x^2 + 0 = x^2$.

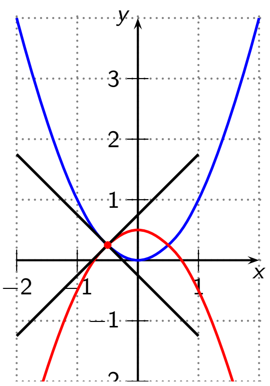
Q.* 4** (1,4).*** Seja P o ponto de interseção dos gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{1}{2} - x^2$, de abscissa negativa. Escreva a definição de derivada num ponto e, com ela, determine as equações da reta tangente e da normal, no ponto P. Num mesmo sistema de oordenadas, exiba o esboço gráfico das funções e das retas.

Resolvendo o sistema $S : \{y = x^2$ e $y = 1/2 - x^2\}$ obtemos $x = -1/2$ ou $x = 1/2$. Assim, $P(-1/2; 1/4)$. A definição de derivada de uma função f, num ponto x_p, é $f'(x_p) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_p + \Delta x) - f(x_p)}{\Delta x}$.

Para $x_p = -1/2$ temos $f(-1/2) = 1/4$, $f(-1/2 + \Delta x) = (-1/2 + \Delta x)^2 = (\Delta x)^2 - \Delta x + 1/4$ e

$$\begin{aligned} a_t &= f'(-1/2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 - \Delta x + 1/4 - 1/4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x - 1 = -1. \end{aligned}$$

Como $a_n \cdot a_t = -1$, então $a_n = 1$. As equações da reta tangente e da reta normal, respectivamente, são $t : y - 1/4 = -1(x + 1/2)$ e $n : y - 1/4 = 1(x + 1/2)$ ou $t : 4y + 4x + 1 = 0$ e $n : 4y - 4x = 3$.



Q.* 5** (1,2).*** Complete a tabela abaixo, sabendo que u, v e $\clubsuit$ representam alguma função em x, e n um número qualquer.

Primitiva	Derivada
n	0
x	1
$\clubsuit^n$	$n \cdot \clubsuit^{n-1} \cdot \clubsuit'$
$u \cdot v$	$v' \cdot u + u' \cdot v$
$n \cdot \clubsuit$	$n \cdot \clubsuit'$
$\operatorname{sen}(x) + \cos(\clubsuit)$	$\cos(x) - \operatorname{sen}(\clubsuit) \cdot \clubsuit'$

Primitiva	Derivada
$\sec(x)$	$\sec(x)\operatorname{tg}(x)$
$-\operatorname{cotg}(x)$	$\operatorname{cossec}^2(x)$
$\operatorname{tg}(x)$	$\sec^2(x)$
$2^\clubsuit$	$2^\clubsuit \cdot \ln(2) \cdot \clubsuit'$
$-\operatorname{cossec}(x)$	$\operatorname{cossec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x)$
u/v	$(u'v - vu')/v^2$