



UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (ECI001 – EC-NR06)

PROFESSOR: Adriano Cattai

NOME: _____

SEMESTRE: 2011.2

DATA: 13/09/2011

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. A interpretação faz parte da avaliação;
2. Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;
3. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;
4. Utilize caneta preta ou azul;
5. Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;
6. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
7. Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
8. Nesta folha, escreva apenas seu nome.

"Fico triste quando alguém me ofende, mas, com certeza, eu ficaria mais triste se fosse eu o ofensor..."

Magoar alguém é terrível!" (Chico Xavier)

Boa Prova!

Q. 1 (2,0). Considerando que $(\diamond) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3,9$; $(\square) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4,1$ e $(\triangle) \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$, responda;

- (a) A partir de (\diamond) e (\square) o que se pode afirmar sobre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? Por que?
- (b) Escreva como se lê (\triangle) e dê seu significado;
- (c) A partir de (\diamond) ou de (\square) podemos afirmar qual é a imagem de 1? Por que?

(a) Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3,9 \neq 4,1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, afirmamos que o limite não existe.

(b) O limite da função f , quando x tende a menos três pela esquerda, é igual a mais infinito e, isto quer dizer que, à medida que tomamos valores para x , arbitrariamente próximos de -3 e com valores menores a -3 , os valores para a imagem da função f crescem ilimitadamente.

(c) Não! $f(1)$ pode ser qualquer um ou pior, $f(1)$ talvez nem exista. Por exemplo, a função $f(x) = \begin{cases} 3,9; x < 1 \\ 4,1; x > 1 \end{cases}$ não está definida em 1, logo não existe $f(1)$, mesmo atendendo $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3,9$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4,1$.

Q. 2 (3,2). Avalie, cada limite abaixo:

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \log_2 \frac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 27^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 - 10x + 25}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 7}$

(a) Como a função logarítmica é contínua, escrevemos $\lim_{x \rightarrow -1} \log_2 \frac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2} = \log_2 \left(\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2} \right)$.

Agora, para $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2}$, temos $\lim_{x \rightarrow -1} -x^3 - 2x^2 + 5x + 6 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -1} -x^2 + x + 2 = 0$, ou seja, uma forma indeterminada $0/0$. Dividindo os polinômios, ambos por $x + 1$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-x^2 - x + 6)}{(x+1)(-x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 - x + 6}{-x + 2} = \frac{6}{3} = 2.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow -1} \log_2 \frac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2} = \log_2(2) = 1$.

(b) Como $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 + 2x - 35 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 10x + 25 = 0$, temos uma forma indeterminada $0/0$. No entanto, fatorando

os polinômios e simplificando, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 - 10x + 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x+7)(x-5)}{(x-5)^2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+7}{x-5}.$$

Logo, estudando o sinal do denominador, concluímos:

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+7}{x-5} = \frac{12}{0^+} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x+7}{x-5} = \frac{12}{0^-} = -\infty.$$

(c) Como a função exponencial é uma função contínua, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} 27^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}} = 27^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}$. Agora, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x^3 = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3+2x^2-1 = +\infty$, temos uma forma indeterminada ∞/∞ . Mas,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Finalmente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 27^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}} = 27^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}} = 27^{-1/3} = \frac{1}{27^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}.$

(d) Perceba que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+7}$ é indeterminado e na forma $\infty - \infty$. No entanto,

$$x - \sqrt{x^2+7} = \frac{(x - \sqrt{x^2+7})(x + \sqrt{x^2+7})}{x + \sqrt{x^2+7}} = \frac{-7}{x + \sqrt{x^2+7}}.$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7}{x + \sqrt{x^2+7}} = \frac{-7}{+\infty} = 0.$

Q. 3 (2,8). Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Se $f(1) = 2$, então $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$;

(b) Se f é uma função contínua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, então f possui algum zero em entre a e b ;

(c) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é infinito, então $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 0$;

(d) Se f é uma função contínua para todo $x \neq 0$ com $f(0) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

(a) Falso. Por exemplo, dada função $f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 1 \\ 3, & x < 1 \end{cases}$, temos $f(1) = 2$ e, no entanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(b) Falso. Para a função contínua $f(x) = \frac{1}{x}$ temos $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$, donde $f(-1) \cdot f(1) < 0$ e, f não possui algum zero (raiz).

(c) Falso. Supondo $f(x) = \frac{1}{x^2}$, temos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty - \infty$ que é uma indeterminação.

(d) Temos que f é descontínua em $x = 0$. Assim, ou $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$ ou não existe este limite. Portanto, a afirmativa é falsa.

Q. 4 (2,0). Dada a função $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ determine a equação da reta tangente e também da reta normal ao gráfico desta função no ponto em que $x = 2$. Num mesmo sistema de coordenadas, esboce o gráfico de f e das duas retas. (Atenção: determinar a inclinação da reta via limite)

Se $x = 2$, então $f(2) = -2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = 6$. Da fórmula $a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, temos:

$$\begin{aligned} a_t &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 3(2 + \Delta x) + 4 - 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-[4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2] + 6 + 3\Delta x - 6}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-1 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -1 + \Delta x = -1. \end{aligned}$$

Como $a_n = \frac{-1}{a_t}$, temos $a_n = 1$. Assim,

$$\begin{cases} t: y - 6 = -1(x - 2) \\ n: y - 6 = 1(x - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t: y = -x + 8 \\ n: y = x + 4. \end{cases}$$

