UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (ECI001 – EC-MR01)

SEMESTRE: 2011.2

PROFESSOR: *Adriano Cattai*

DATA: 14/09/2011

NOME: ____

1^a AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta* ***preta*** *ou* ***azul****;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Fico triste quando alguém me ofende, mas, com certeza, eu ficaria mais triste se fosse eu o ofensor...
Magoar alguém é terrível!" (Chico Xavier)

Boa Prova!

Q.* 1** (2,0).*** Considerando que ($\Diamond$) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3,9$; ($\Box$) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 4,1$ e ($\triangle$) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$, responda;

(a) A partir de ($\Diamond$) e ($\Box$) o que se pode afirmar sobre $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? Por que?

(b) Escreva como se lê ($\triangle$) e dê seu significado;

(c) A partir de ($\Diamond$) ou de ($\Box$) podemos afirmar qual é a imagem de 1? Por que?

(a) Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3,9 \neq 4,1 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, afirmamos que o limite não existe.

(b) O limite da função f, quando x tende a menos três pela esquerda, é igual a mais infinito e, isto quer dizer que, à medida que tomamos valores para x, arbitrariamente próximos de -3 e com valores menores a -3, os valores para a imagem da função f crescem ilimitadamente.

(c) Não! $f(1)$ pode ser qualquer um ou pior, $f(1)$ talvez nem exista. Por exemplo, a função $f(x) = \begin{cases} 3,9; x < 1 \\ 4,1; x > 1 \end{cases}$ não está definida em 1, logo não existe $f(1)$, mesmo atendendo $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3,9$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 4,1$.

Q.* 2** (3,2).*** Avalie, cada limite abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \log_2 \dfrac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 + 2x - 35}{x^2 - 10x + 25}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} 27^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x - \sqrt{x^2 + 7}$

(a) Como a função logarítmica é contínua, escrevemos $\lim\limits_{x\to -1} \log_2 \dfrac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2} = \log_2 \left(\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2} \right)$.
Agora, para $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2}$, temos $\lim\limits_{x\to -1} -x^3 - 2x^2 + 5x + 6 = 0$ e $\lim\limits_{x\to -1} -x^2 + x + 2 = 0$, ou seja, uma forma indeterminada $0/0$. Dividindo os polinômios, ambos por $x + 1$, temos:

$$\lim_{x\to -1} \frac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(-x^2 - x + 6)}{(x+1)(-x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{-x^2 - x + 6}{-x + 2} = \frac{6}{3} = 2.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to -1} \log_2 \dfrac{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + x + 2} = \log_2(2) = 1$.

(b) Como $\lim\limits_{x\to 5} x^2 + 2x - 35 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 5} x^2 - 10x + 25 = 0$, temos uma forma indeterminada $0/0$. No entanto, fatorando os polinômios e simplificando, temos:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2+2x-35}{x^2-10x+25} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+7)(x-5)}{(x-5)^2} = \lim_{x\to 5} \frac{x+7}{x-5}.$$

Logo, estudando o sinal do denimonador, concluímos:

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x+7}{x-5} = \frac{12}{0^+} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to 5^-} \frac{x+7}{x-5} = \frac{12}{0^-} = -\infty.$$

(c) Como a função exponencial é uma função contínua, então $\lim\limits_{x\to+\infty} 27^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}} = 27^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}$. Agora, como $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^3 = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3+2x^2-1 = +\infty$, temos uma forma indeterminada ∞/∞. Mas,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{3x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Finalmente, $\lim\limits_{x\to+\infty} 27^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}} = 27^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}} = 27^{-1/3} = \frac{1}{27^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}.$

(d) Perceba que $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+7}$ é indeterminado e na forma $\infty-\infty$. No entanto,

$$x-\sqrt{x^2+7} = \frac{(x-\sqrt{x^2+7})(x+\sqrt{x^2+7})}{x+\sqrt{x^2+7}} = \frac{-7}{x+\sqrt{x^2+7}}.$$

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-7}{x+\sqrt{x^2+7}} = \frac{-7}{+\infty} = 0.$

Q. 3 (2,8)**.** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Se $f(1)=2$, então $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$;

(b) Se f é uma função contínua tal que $f(a)\cdot f(b) < 0$, então f possui algum zero em entre a e b;

(c) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é infinito, então $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = 0$;

(d) Se f é uma função contínua para todo $x\neq 0$ com $f(0)=0$, então $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(a) Falso. Por exemplo, dada função $f(x) = \begin{cases} 2, x\geq 1 \\ 3, x<1 \end{cases}$, temos $f(1)=2$ e, no entanto, não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

(b) Falso. Para a função contínua $f(x) = \frac{1}{x}$ temos $f(-1)=-1$ e $f(1)=1$, donde $f(-1)\cdot f(1) < 0$ e, f não possui algum zero (raíz).

(c) Falso. Supondo $f(x) = \frac{1}{x^2}$, temos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) - \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty-\infty$ que é uma indeterminação.

(d) Temos que f é descontínua em $x=0$. Assim, ou $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq 0$ ou não existe este limite. Portanto, a afirmativa é falsa.

Q. 4 (2,0)**.** Dada a função $f(x) = -x^2+3x+4$ determine a equação da reta tangente e também da reta normal ao gráfico desta função no ponto em que $x=2$. Num mesmo sistema de coordenadas, esboce o gráfico de f e das duas retas. (Atenção: determinar a inclinação da reta via limite)

Se $x = 2$, então $f(2) = -2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = 6$. Da fórmula $a_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, temos:

$$\begin{aligned} a_t &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(2+\Delta x)^2 + 3(2+\Delta x) + 4 - 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-[4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2] + 6 + 3\Delta x - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-1 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -1 + \Delta x = -1. \end{aligned}$$

Como $a_n = \dfrac{-1}{a_t}$, temos $a_n = 1$. Assim,

$$\begin{cases} t : y - 6 = -1(x - 2) \\ n : y - 6 = 1(x - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t : y = -x + 8 \\ n : y = x + 4. \end{cases}$$