Universidade Salvador

Disciplina: Cálculo Diferencial (EC-NR05) Semestre: 2011.1

Professor: *Adriano Cattai* Data: 10/05/2011

Nome: ______________________________

2ª Avaliação da Aprendizagem

Instruções:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Não se pode esperar resultados diferentes fazendo as coisas da mesma forma." (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q.* 1** (1,6).*** Dada a função $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ use a definição de derivada para mostrar que $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Usaremos o limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ para determinar a derivada de f num ponto x_0 qualquer. Inicialmente, vamos simplificar $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, levando em conta que $x - x_0 \neq 0$, pois no limite $x \to x_0$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x_0}{x_0-1}}{x-x_0} = \frac{\dfrac{x(x_0-1)-x_0(x-1)}{(x-1)(x_0-1)}}{x-x_0} = \frac{xx_0 - x - x_0x + x_0}{(x-1)(x_0-1)(x-x_0)} \\
&= \frac{-(x-x_0)}{(x-1)(x_0-1)(x-x_0)} = \frac{-1}{(x-1)(x_0-1)}.
\end{aligned}$$

Deste modo, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{(x-1)(x_0-1)} = \frac{-1}{(x_0-1)^2}.$$

Como x_0 é qualquer, segue que $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$, $\forall\, x \neq 1$.

Q.* 2** (2,0).*** Mostre que as retas tangentes à curva $f(x) = \dfrac{\pi \cdot \operatorname{sen}(x)}{x}$, nos pontos de abscissas $x_1 = \pi$ e $x_2 = -\pi$, são ortogonais.

Para que as retas tangentes, t_1 e t_2, sejam ortogonais, precisamos mostrar que $m_1 \cdot m_2 = -1$, em que $m_1 = f'(x_1)$ e $m_2 = f'(x_2)$. Derivando f, pela regra do quociente, temos $f'(x) = \dfrac{\pi \cdot \cos(x) \cdot x - \pi \cdot \operatorname{sen}(x)}{x^2}$. Assim:

$$\begin{aligned}
m_1 = f'(\pi) &= \frac{\pi \cdot \cos(\pi) \cdot \pi - \pi \cdot \operatorname{sen}(\pi)}{\pi^2} = \frac{\pi \cdot (-1) \cdot \pi - \pi \cdot 0}{\pi^2} = -1 \\
m_2 = f'(-\pi) &= \frac{\pi \cdot \cos(-\pi) \cdot (-\pi) - \pi \cdot \operatorname{sen}(-\pi)}{(-\pi)^2} = \frac{\pi \cdot (-1) \cdot (-\pi) - \pi \cdot 0}{\pi^2} = 1.
\end{aligned}$$

Deste modo, temos que $m_1 \cdot m_2 = -1 \cdot 1 = -1$, como queríamos.

Q.* 3** (2,0).*** Seja $f(x) = (x-2)\cdot|x|$. É sabido que f não é suave em $x = 0$. Assim, justifique esta informação de duas maneiras:

(a) Analiticamente, ou seja, determinando $f'(x)$ e analisando a não existência de $f'(0)$;

(b) Geometricamente, ou seja, exibindo o esboço gráfico de f e analisando a não suavidade, deste gráfico, quando $x = 0$.

(a) Primeiramente, vamos reescrever f como uma função de duas sentenças, já que envolve a função modular. Assim, ficamos com:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\cdot x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ (x-2)\cdot(-x) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 2x - x^2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Derivando, cada sentença, temos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 2 - 2x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

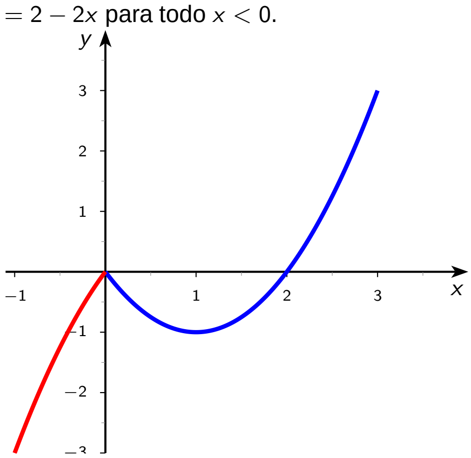
Assim, podemos afirmar que $f'(x) = 2x - 2$ para todo $x > 0$ e que $f'(x) = 2 - 2x$ para todo $x < 0$.

Em $x = 0$, temos:

$$f'_-(0) = 2 - 2\cdot 0 = 2 \quad \text{e} \quad f'_+(0) = 2\cdot 0 - 2 = -2.$$

Ou seja, f não é derivável em $x = 0$.

(b) A linha azul, do gráfico ao lado, refere-se à função quando $x \geq 0$, ou seja, $f(x) = x^2 - 2x$ e, a linha vermelha $f(x) = 2x - x^2$. Note, a partir deste gráfico, que f não é derivável no ponto em que $x = 0$, visto que ele apresenta uma "quina". Assim, podemos ver, pelo gráfico, que f não é suave, apenas, em $x = 0$ por não admitir uma reta tangente neste ponto.



Q.* 4** (2,4).*** Julgue, justificando, em verdadeiro ou falso, cada item abaixo:

(a) Toda função contínua é suave;

(b) Uma função F é chamada *primitiva* de f, num conjunto A, se $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in A$. Assim, dada uma função f qualquer, afirmamos que f admite uma única primitiva, ou seja, f possui apenas uma primitiva;

(c) Pela regra do quociente, para derivadas, temos: $[\text{tg}(x)]' = \left[\dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right]' = \dfrac{\cos(x)}{-\text{sen}(x)} = -\text{cotg}(x)$;

(a) Falso. Como contra exemplo, podemos exibir a função dada na questão anterior. Veja que a mesma é contínua para todo x real e não é derivável, apenas, em $x = 0$.

(b) Falso. Por exemplo, as funções $F_1(x) = x^2 + 1$, $F_2(x) = x^2 + 2$ e $F_3(x) = x^2 + 3$ são primitivas da função $f(x) = 2x$, visto que $[x^2]' = 2x$ e que a derivada da constante é zero. Num modo geral, se $F'(x) = f(x)$, temos que $F(x) + K$ é uma família de primitivas para a função f, visto que $[K]' = 0$, em que K é uma constante qualquer. Assim, afirmamos que uma função possui infinitas primitivas.

(c) Falso. O correto é:

$$[\text{tg}(x)]' = \left[\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right]' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \text{sen}(x)\cdot(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).$$

Q. 5 (2,0)**.** Seja $V(x)$ o volume do cubo de $x\ cm$ de aresta. Usando uma aproximação com duas casas decimais após a vírgula, determine:

(a) A razão de variação média do volume quando a medida da aresta varia de $3\ cm$ para $3,1\ cm$ e, depois, quando varia de $3\ cm$ para $3,01\ cm$;

(b) A razão de variação instantânea do volume por variação em centímetros no comprimento de aresta x, quando $x = 3\ cm$.

Interprete o resultado obtido.

(a) O volume de um cubo, de aresta x, é dado pela fórmula $V(x) = x^3$. A razão média de variação do volume, em relação à variação da aresta, é dada pelo quociente $\dfrac{\Delta V}{\Delta x} = \dfrac{V(x_2) - V(x_1)}{x_2 - x_1}$, em que $x_1 < x_2$. Assim, temos:

(i) $\dfrac{\Delta V}{\Delta x} = \dfrac{V(3,1) - V(3)}{3,1 - 3} = \dfrac{(3,1)^3 - 3^3}{0,1} = (29,79 - 27) \times 100 = 2,79 \times 10 = 27,9\ cm^3/cm$;

(ii) $\dfrac{\Delta V}{\Delta x} = \dfrac{V(3,01) - V(3)}{3,01 - 3} = \dfrac{(3,01)^3 - 3^3}{0,01} = (27,27 - 27) \times 100 = 0,27 \times 100 = 27\ cm^3/cm$.

(b) A razão de variação instantânea é o limite, com $\Delta x \to 0$, da razão média (isto é, a derivada). Então, como $V(x) = x^3$, temos $V'(x) = 3x^2$. No instante em que $x = 3$, temos $V'(3) = 3 \cdot (3)^2 = 27\ cm^3/cm$.