UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EC-NR05) SEMESTRE: 2011.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 05/04/2011

NOME: ________________________________

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos o seu conhecimento. É o seu bem mais precioso. Explore; viaje; descubra. Conheça." (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q. 1 (1,5)***.***

(a) Escreva a definição de função contínua num ponto;

(b) Dê exemplo de uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua, para todo $x\neq 2$ e que seja possível redefinir $f(2)$ para que f seja contínua;

(c) Dê exemplo de uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que seja contínua, para todo $x\neq 0$ e que não seja possível redefinir $g(0)$ para que g se torne contínua.

(a) Dizemos que uma função f é contínua no ponto $x=a\in\text{Dom}(f)$ se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$;

(b) Seja $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{se} \quad x\neq 2 \\ 1 & \text{se} \quad x=2\end{cases}$. Assim, temos que f não é contínua (apenas) em $x=2$. Agora, se modificarmos, na definição de f, $f(2)=1$ para $f(2)=3$, teremos f contínua;

(c) Seja $g(x)=\dfrac{1}{x^2}, \forall x\neq 0$ e $g(x)=1$ se $x=0$. Neste caso, não podemos atribuir algum valor para $f(0)$ de modo que fique igual ao $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ visto que, este limite é infinito.

Q. 2 (3,0)***.*** Avalie, cada limite abaixo:

(a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cos(3h)}{4h^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 16^{\frac{1-x^3}{4x^3+2x^2-1}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x^3-8}$

(a) O limite é indeterminado $(0/0)$ pois $\lim\limits_{h\to 0} 1-\cos(3h)=0$ e $\lim\limits_{h\to 0} 4h^2=0$. Como $[1-\cos(3h)]\cdot[1+\cos(3h)]=1-\cos^2(3h)=\text{sen}^2(3h)$ e $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{sen}(3h)}{3h}=\lim\limits_{3h\to 0}\dfrac{\text{sen}(3h)}{3h}=1$, temos:

$$\frac{1-\cos(3h)}{4h^2}=\frac{[1-\cos(3h)]\cdot[1+\cos(3h)]}{4h^2\cdot(1+\cos(3h))}=\frac{\text{sen}^2(3h)}{4h^2\cdot(1+\cos(3h))}=\frac{\text{sen}^2(3h)}{(3h)^2}\cdot\frac{9}{4\cdot(1+\cos(3h))}.$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(3h)}{4h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}^2(3h)}{(3h)^2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{9}{4\cdot(1+\cos(3h))}=1^2\cdot\frac{9}{4\cdot 2}=\frac{9}{8}.$$

(b) Como $\lim\limits_{x\to+\infty} 16^{f(x)}=8^{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}$, precisamos determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^3}{4x^3+2x^2-1}$, que é uma indeterminação ∞/∞, pois $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^3=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3+2x^2-1=+\infty$. Se levarmos em conta o monômio de maior grau, teremos

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^3}{4x^3+2x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3}{4x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{4} = -\dfrac{1}{4}$. Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty} 16^{\frac{1-x^3}{4x^3+2x^2-1}} = 16^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{4x^3+2x^2-1}} = 8^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}.$$

(c) O $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x^3-8}$ é indeterminado $(0/0)$, pois $\lim\limits_{x\to2} \sqrt{x+1}-\sqrt{3} = 0$ e $\lim\limits_{x\to2} x^3-8 = 0$. Podemos racionalizar o numerador e fatorar o denominador, como segue:

$$\frac{\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{3}\right]\cdot\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right]}{[x^3-8]\cdot\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right]} = \frac{x+1-3}{(x-2)\cdot(x^2+4x+4)\cdot\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right]} = \frac{1}{(x^2+4x+4)\cdot\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right]}$$

Tendo $x\to2$, temos:

$$\frac{1}{(x^2+4x+4)\cdot\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right]} \to \frac{1}{(2^2+4\cdot2+4)\cdot\left[\sqrt{2+1}+\sqrt{3}\right]} = \frac{1}{24\sqrt{3}}.$$

Deste modo, $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x^3-8} = \dfrac{1}{24\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{72}$.

Q. 3 **(2,8).** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Se f é um função contínua tal que $f(-1)=3$, então $\lim\limits_{x\to3} f(x) = -1$;

(b) Se f é um função constante (isto é, $f(x)=k\in\mathbb{R}$, $\forall\, x$), então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq 0$;

(c) Se $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{f(x)-5}{x-2}$ é finito, então $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ pode ser qualquer valor;

(d) Se f é uma função contínua para todo $x\neq0$ com $f(0)=0$, então $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

(a) Falso! Por exemplo, a função constante $f(x)=3$ é contínua e $f(-1)=3$. No entanto, $\lim\limits_{x\to3} f(x) = 3 \neq -1$.

(b) Falso! Se f é constante, ou seja $f(x)=k$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$. Assim, $k-k=0$.

(c) Falso! Como $\lim\limits_{x\to2} x-2 = 0$ e $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{f(x)-5}{x-2}$ é finito, devemos ter, obrigatoriamente, $\lim\limits_{x\to2} f(x)-5=0$ pois, caso contrários, teríamos uma impossibilidade $\dfrac{K}{0}$. Portanto, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=5$.

(d) Falso! Como f é descontínua em $x=0$ e $f(0)=0$, então não podemos ter $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

Q. 4 **(2,7).** Dada a função $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x<-1 \\ 1-x^2 & \text{se} \quad -1<x<1 \\ x-1 & \text{se} \quad x>1 \\ 2 & \text{se} \quad x\in\{-1,1\} \end{cases}$, faça seu esboço gráfico, determine os limites abaixo e decida (justificando) se existe algum ponto em que f é descontínua.

(a) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

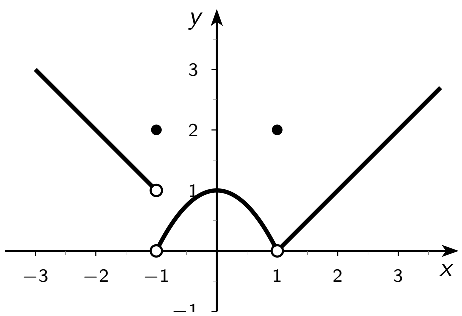
(d) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Pelo gráfico, afirmamos que:

(a) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$; (b) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=0$; (c) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=0$; (d) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=1$; (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.



Como não existe $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, visto que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, f não é contínua em $x=-1$. Além disso, temos que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0 \neq f(1)=2$, ou seja, f também não é contínua em $x=1$.