UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EC-MR03) SEMESTRE: 2011.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 11/05/2011

NOME: ____

2ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta* ***preta*** *ou* ***azul****. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Não se pode esperar resultados diferentes fazendo as coisas da mesma forma." (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q.* 1** (1,5).*** Dada a função $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$ mostre que $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)^2}$ de duas formas diferentes:
(a) com o uso da definição de derivada; (b) com o uso de regras de derivação.

(a) Usaremos o limite $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{2-x}{x+1} - \dfrac{2-x_0}{x_0+1}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{(2-x)(x_0+1)-(2-x_0)(x+1)}{(x+1)(x_0+1)}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{2x_0+2-xx_0-x-2-2x+xx_0+x_0}{(x+1)(x_0+1)(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{-3(x-x_0)}{(x+1)(x_0+1)(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{-3}{(x+1)(x_0+1)} \\
&= \frac{-3}{(x_0+1)^2}
\end{aligned}
$$

Visto que $x_0 \neq 1$ é qualquer, temos que $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)^2}$.

(b) Pela regra do quociente, para derivadas, temos:

$$
f'(x) = \frac{[2-x]' \cdot (x+1) - (2-x)\cdot[x+1]'}{(x+1)^2} = \frac{-1\cdot(x+1)-(2-x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}.
$$

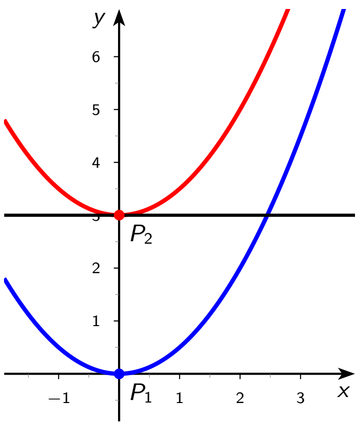
Q.* 2** (2,0).*** Esboce o gráfico das funções $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ e $g(x) = f(x)+3$, num mesmo sistema de coordenadas. O que se pode dizer a respeito das inclinações das retas tangentes aos dois gráficos nos pontos $x=0$ e $x=2$? Justifique geometricamente e analiticamente.

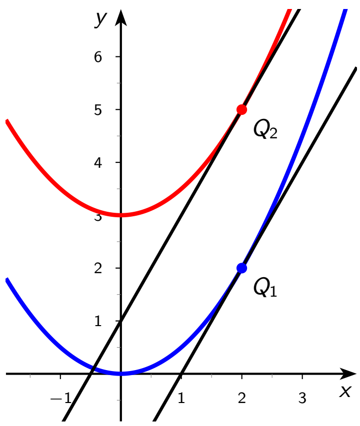
Como a inclinação da reta tangente é dada pela derivada no ponto, precisamos de $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 2x$. (note que as derivadas são iguais porque f e g são iguais a menos de uma constante)

$$x = 0 \Rightarrow f'(0) = g'(0) = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow f'(2) = g'(2) = 4$$

Quando $x = 0$ temos os pontos P_1 e P_2 e as retas tangentes são paralelas ao eixo x. Em P_1, a tangente, é o próprio eixo x.
Para $x = 2$, nos pontos Q_1 e Q_2, as retas têm inclinações iguais a 4, ou seja, paralelas. Veja as figuras ao lado.





Q.* 3** (1,5).*** Dois corpos tem movimento em uma mesma reta segundo as equações $s_1(t) = t^3 + 4t^2 + t - 1$ e $s_2(t) = 2t^3 - 5t^2 + t + 2$. Determine as velocidades e as posições desses dois corpos no instante em que as suas acelerações são iguais. Considere como unidade de comprimento o metro e de tempo o segundo.

Como a aceleração é a derivada da velocidade e, por sua vez, a velocidade é a derivada da função horária, temos:

$$v_1(t) = s_1'(t) = 3t^2 + 8t + 1 \quad \Rightarrow \quad a_1(t) = v_1'(t) = 6t + 8$$

$$v_2(t) = s_2'(t) = 6t^2 - 10t + 1 \quad \Rightarrow \quad a_2(t) = v_2'(t) = 12t - 10$$

Seja t_0 o instante em que os dois corpos têm a mesma aceleração. Assim, $a_1(t_0) = a_2(t_0)$ implica $6t_0 + 8 = 12t_0 - 10$, donde $t_0 = 3\ seg$. Portanto, temos, respectivamente, as velocidades e as posições desses dois corpos:

$$v_1(3) = 3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + 1 = 51\ m/s \quad \text{e} \quad s_1(3) = 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 3 - 1 = 65\ m$$

$$v_2(3) = 6 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 1 = 25\ m/s \quad \text{e} \quad s_2(3) = 2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 + 2 = 28\ m$$

Q.* 4** (2,0).*** Se a derivada f' de uma função f for ela mesma diferenciável, então a derivada de f' será denotada por f'', sendo chamada de *derivada segunda* de f, assim, $f'' = [f']'$. Prosseguindo, com este raciocínio, podemos obter as derivadas terceira, quarta, quinta, etc. Denotamos $f^{(n)}$ como a enésima derivada de f, a partir da quarta derivada. Simplificando, temos:

$$f' = (f)'; \quad f'' = (f')'; \quad f''' = (f'')'; \quad f^{(4)} = (f''')'; \quad f^{(5)} = (f^{(4)})'; \quad \ldots \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'; \quad \ldots$$

Assim, estabeleça uma fórmula para obter a derivada de ordem n, da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e, com esta fórmula, determine a derivada de ordem 40, isto é, determinar a quadragésima derivada de f.

Derivando algumas vezes, temos:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}; \quad f''(x) = \frac{-1 \cdot (-2)}{x^3}; \quad f'''(x) = \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3)}{x^4}; \quad f^{(4)}(x) = \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)}{x^5};$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)}{x^6}; \ldots$$

Perceba que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$. Deste modo, $f^{(40)}(x) = \dfrac{(-1)^{40} \cdot 40!}{x^{40+1}} = \dfrac{40!}{x^{41}}$.

Q.* 5** (1,5).*** Mostre que $[\text{sen}(2x)]' = 2\cos(2x)$. (Dica: use a fórmula do seno da soma)

Além da fórmula do seno da soma, usaremos as regras de derivação.

$[\text{sen}(2x)]' = [2\text{sen}(x)\cos(x)]' = 2[\text{sen}(x)\cos(x)]' = 2[\cos(x)\cos(x) + \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))] = 2[\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)] = 2\cos(2x)$.

Q.* 6** (1,5).*** Seja $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ uma curva. Escreva a equação da reta normal a esta curva que seja paralela à reta $r : y - 8x + 3 = 0$.

Seja $m_r = 8$ a inclinação da reta r. Como a reta normal n é paralela à reta r, temos $m_n = 8$. Como $m_t \cdot m_n = -1$, temos $m_t = \dfrac{-1}{8}$. Visto que a inclinação da reta tangente é dada pela derivada num ponto, temos:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x-1) - 2x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Da equação $f'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0 - 1)^2} = \dfrac{-1}{8}$, temos $(x_0 - 1)^2 = 16$, isto é, $x_0 = 5$ ou $x_0 = -3$. Finalmente, temos:

$$\diamond\ x_0 = 5; \quad y_0 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad n : y - \frac{5}{2} = 8(x - 5) \quad \Leftrightarrow \quad n : 2y - 16x + 75 = 0;$$

$$\diamond\ x_0 = -2; \quad y_0 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad n : y - \frac{3}{2} = 8(x + 3) \quad \Leftrightarrow \quad n : 2y - 16x - 51 = 0.$$