UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EC-MR03) SEMESTRE: 2011.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 06/04/2011

NOME: ____________________

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta* ***preta*** *ou* ***azul****. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

““Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos o seu conhecimento. É o seu bem mais precioso. Explore; viaje; descubra. Conheça.” (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q. 1 (1,5)***.*** Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Supondo que $f(x) = 1 + 4x - x^2$ e $h(x) = x^2 - 4x + 9$, construa, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de f e h para determinar $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$. Em seguida, justifique analiticamente.

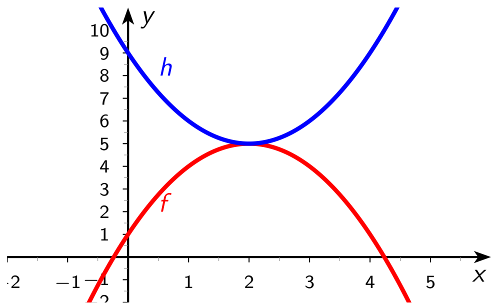
O teorema do confronto (ou do sanduíche) nos diz que:

se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, *então* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Como

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 1 + 4x - x^2 = 5$$
$$\lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} x^2 - 4x + 9 = 5$$

segue que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5$.



Q. 2 (2,0)***.*** Avalie, cada limite abaixo:

(a) $\lim\limits_{y \to 2} \dfrac{y^3 - 4y}{y^3 - 3y^2 + 2y}$ (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_3 \left[\dfrac{\sqrt{x} - 2}{2 + \sqrt{x}} \right]$

(a) O limite é indeterminado (0/0) pois $\lim\limits_{y \to 2} y^3 - 4y = 0$ e $\lim\limits_{y \to 0} y^3 - 3y^2 + 2y = 0$. Como $y^3 - 4y = y(y-2)(y+2)$ e $y^3 - 3y^2 + 2y = y(y-2)(y-1)$, temos:

$$\lim_{y \to 2} \frac{y^3 - 4x}{y^3 - 3y^2 + 2y} = \lim_{y \to 2} \frac{y(y-2)(y+2)}{y(y-2)(y-1)} = \lim_{y \to 2} \frac{y+2}{y-1} = \frac{2+2}{2-1} = 4.$$

(b) Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_3 f(x) = \log_3 \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, calculemos $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{2 + \sqrt{x}}$, que é uma indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$, visto que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Assim, façamos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - 2}{2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - 1}{\frac{2}{\sqrt{x}} + 1} = \frac{1 - 0}{0 + 1} = 1.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_3 \left[\dfrac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \right] = \log_3(1) = 0$.

Q. 3 (1,5). Sejam f e g, duas funções tais que $f(x) = x - 4$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$.

(a) Por que f e g não são iguais?

(b) Mesmo tendo f e g diferentes, podemos dizer que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} g(x)$? Por que?

(a) As funções f e g são diferentes, pois possuem domínios diferentes: $f(x) = x - 4$ está definida em todo $\mathbb{R}$, ou seja, $\text{Dom}(f)\mathbb{R}$, enquanto que $g(x)$ está definida para todo $x \neq 3$, ou seja, $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{3\}$.
(b) Apesar das funções f e g serem diferentes, para valores de $x \neq 3$, vale que $f(x) = g(x)$, pois

$$g(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \frac{(x-4)(x-3)}{x-3} = x - 4 = f(x), \ \forall\, x \neq 3$$

Como no cálculo de $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-4)(x-3)}{x-3}$ devemos considerar valores de x próximos de 2, mas diferentes de 2, podemos substituir $\dfrac{(x-4)(x-3)}{x-3}$ por $x - 4$.

Q. 4 (1,5). Verifique que $x = 2$ e $x = 4$ são duas raízes da equação $x^2 = 2^x$. Use o TVI para mostrar que esta equação admite outra raiz real. Qual o menor intervalo, de comprimento inteiro, que esta raiz pertence?

Veja que $2^2 = 2^2 = 4$ e $4^2 = 2^4 = 16$, ou seja, que $x = 2$ e $x = 4$ são raízes da equação $x^2 = 2^x$. Como $g(x) = 2^x$ e $h(x) = x^2$ são duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, vemos que a função $f(x) = g(x) - h(x) = 2^x - x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$. Assim, precisamos de dois números a e b tais que $f(a)\cdot f(b) < 0$ para garantir que existe algum $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Seja $a = -1$ e $b = 0$. Temos:

$$f(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = 0,5 - 1 = -0,5 < 0 \quad \text{e} \quad f(0) = 2^0 - (0)^2 = 1 - 0 = 1 > 0.$$

Portanto, existe algum número c, entre -1 e 0, ta que $f(c) = 0$, isto é $x = c$ é outra solução para a equação $x^2 = 2^x$. Perceba que $(-1, 0)$ é o menor intervalo, de comprimento inteiro, contendo esta outra raiz.

Q. 5 (2,0).

(a) Quanto deve ser a imagem de zero para que a função $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$ seja contínua?

(b) Se uma função f muda de sinal quando x varia de um ponto $x = a$ para o ponto $x = b$, existirá, obrigatoriamente, um ponto entre a e b em que a função f se anula? Por que?

(a) f será contínua se $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$. Calculemos o limite:

$$\lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{2x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{2}{y}} = \left[\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^2 = e^2.$$

Assim, $f(0)$ deve ser igual a e^2.
(b) A resposta é Não. Por exemplo, considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$, tal que $f(0) = 2$. Temos $f(x) < 0$ para todo $x < 0$ e $f(x) > 0$ para todo $x > 0$ e, no entanto, não existe, obrigatoriamente, número algum que anule f.

Q. 6 (1,5). Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.