UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EC-MR02) SEMESTRE: 2011.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 12/05/2011

NOME: ______________________________

2ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta* ***preta*** *ou* ***azul***. *Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Não se pode esperar resultados diferentes fazendo as coisas da mesma forma." (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q. 1 (1,4)***.*** Dada a função $f(x)=\dfrac{x-3}{1-x}$ use a definição de derivada para mostrar que $f'(x)=\dfrac{-2}{(1-x)^2}$.

Usaremos o limite $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ para determinar a derivada de f num ponto x_0 qualquer. Inicialmente, vamos simplificar $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, levando em conta que $x-x_0\neq 0$, pois no limite $x\to x_0$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\dfrac{x-3}{1-x}-\dfrac{x_0-3}{1-x_0}}{x-x_0}=\frac{\dfrac{(x-3)(1-x_0)-(1-x)(x_0-3)}{(1-x)(1-x_0)}}{x-x_0}=\frac{-2(x-x_0)}{(1-x)(1-x_0)(x-x_0)}=\frac{-2}{(1-x)(1-x_0)}.$$

Deste modo, temos:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-2}{(1-x)(1-x_0)}=\frac{-2}{(1-x_0)^2}.$$

Como x_0 é qualquer, segue que $f'(x)=\dfrac{-2}{(1-x)^2}$, $\forall\, x\neq 1$.

Q. 2 (2,0)***.*** Dada a função $f(x)=|x^2-1|$, mostre que f não é suave nos pontos de abscissa -1 e 1. Para tanto, justifique analiticamente e geometricamente.

Primeiramente, vamos reescrever f como uma função de duas sentenças, já que envolve a função modular. Assim, ficamos com:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{se} \quad x^2-1\geq 0\\ -(x^2-1) & \text{se} \quad x^2-1<0\end{cases}=\begin{cases} x^2-1 & \text{se} \quad x\leq -1 \text{ ou } x\geq 1\\ 1-x^2 & \text{se} \quad -1<x<1\end{cases}.$$

Derivando, cada sentença, temos:

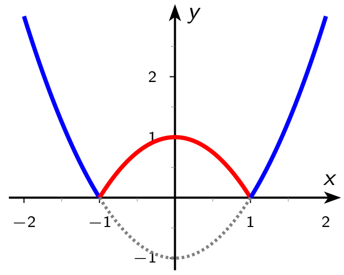
$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{se} \quad x\leq -1 \text{ ou } x\geq 1\\ -2x & \text{se} \quad -1<x<1\end{cases}.$$

Assim, podemos afirmar que $f'(x)=2x$ para todo $x\leq -1$ ou $x\geq 1$ e que, $f'(x)=-2x$ para todo $-1<x<1$. Agora, quando $x=-1$ e $x=1$, temos, respectivamente:

- ◇ $f'_-(-1)=2\cdot(-1)=-2$ e $f'_+(-1)=-2\cdot(-1)=2\Rightarrow\nexists\ f'(-1)$;
- ◇ $f'_-(1)=-2\cdot(1)=-2$ e $f'_+(1)=2\cdot(1)=2\Rightarrow\nexists\ f'(1)$.

Como queríamos.

No gráfico ao lado, a linha azul refere-se à função quando $x \leq -1$ ou $x \geq 1$, ou seja, $f(x) = x^2 - 1$ e, a linha vermelha $f(x) = 1 - x^2$ quando $-1 < x < 1$. Note, a partir deste gráfico, que f não é derivável nos pontos em que $x = -1$ e $x = 1$, visto que eles apresentam "quinas". Assim, podemos ver, pelo gráfico, que f não é suave, apenas, nesses pontos por não admitir uma reta tangente.



Q. 3 (1,6)**.** Dois pontos partem da origem do eixo x no instante $t = 0$ e se move ao longo desse eixo de acordo com as equações $s_1 = t^2 - 2t$ e $s_2 = 8t - t^2$, em que s_1 e s_2 são medidos em metros e t em segundos. Pergunta-se:

(a) Em que instante os dois têm mesma velocidade?

(b) Quais são as velocidades desses dois pontos no instante em que eles têm a mesma posição?

(a) Como $v(t) = s'(x)$, então, $v_1'(t) = 2t - 2$ e $v_2'(t) = 8 - 2t$ representam as velocidades desses pontos em cada instante t. Da equação $v_1'(t) = v_2'(t)$, temos $t = 5/2$. Portanto, dois segundos e meio depois, eles têm a mesma velocidade, que é igual a $3\ m/s$.
(b) Primeiramente, determinaremos o instante em que eles têm a mesma posição:

$$s_1(t) = s_2(t) \Rightarrow t^2 - 2t = 8t - t^2 \Rightarrow t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 5.$$

Quando $t = 0$, os pontos estão na origem, logo velocidade nula. Quando $t = 5$, eles estão a $15\ m$ da origem e com velocidades iguais a $8\ m/s$ e $-2\ m/s$, cada um.

Q. 4 (1,5)**.** Mostre que $[\text{sen}(2x)]' = 2\cos(2x)$. (Dica: use a fórmula do seno da soma)

Usaremos as identidades trigonométricas: $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cdot\cos(x)$ e $\cos(2x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)$. Derivaremos a primeira e usaremos a segunda para simplificar, vejamos:

$$[\text{sen}(2x)]' = [2\text{sen}(x)\cdot\cos(x)]' = 2[\text{sen}(x)\cdot\cos(x)]' = 2[\cos(x)\cdot\cos(x) - \text{sen}(x)\cdot\text{sen}(x)] = 2\cos(2x).$$

Q. 5 (2,0)**.** Seja $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ uma curva. Escreva a equação da reta normal a esta curva que seja paralela à reta $r : y - 8x + 3 = 0$.

Como retas paralelas têm a mesma inclinação e que a inclinação da reta r é $m_r = 8$, concluímos que a inclinação da reta normal n é $m_n = 8$. Logo, a inclinação da reta tangente t é $m_t = -\dfrac{1}{8}$. Uma vez que a inclinação da tangente pode ser obtida através da derivada, temos:

$$\begin{cases} f'(x) = \left[\dfrac{2x}{x-1}\right]' = \dfrac{2\cdot(x-1) - 2x\cdot 1}{(1-x)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \\ f'(x_0) = -\dfrac{1}{8} \end{cases} \Longrightarrow \frac{-2}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{8} \Rightarrow (x-1)^2 = 16 \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -3.$$

Para $x_0 = 5$, temos $y_0 = \dfrac{5}{2}$, daí $n : y - \dfrac{5}{2} = 8(x-5) \Longleftrightarrow 2y - 16x + 75 = 0$. Por outro lado, se $x_0 = -3$, temos $y_0 = \dfrac{3}{2}$, daí $n : y - \dfrac{3}{2} = 8(x+3) \Longleftrightarrow 2y - 16x - 51 = 0$.

Q. 6 (1,5)**.** Seja $A(x)$ a área de um quadrado de lado $x\ cm$. Determine a taxa de variação média da área quando a medida do lado varia:

(a) de $1\ cm$ para $2\ cm$;

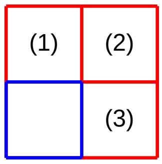
(b) de $2\ cm$ para $3\ cm$.

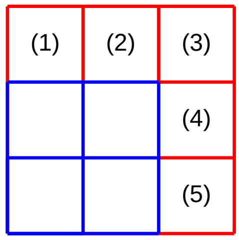
Faça desenhos desses quadrados (de lados 1, 2 e 3) para interpretar tal resultado obtido.

Como $A(x) = x^2$, então $A(1) = 1$, $A(2) = 4$ e $A(3) = 9$. Daí, temos:

(a) $\dfrac{\Delta A}{\Delta x} = \dfrac{A(2) - A(1)}{2 - 1} = 3cm^2/cm$;

(b) $\dfrac{\Delta A}{\Delta x} = \dfrac{A(3) - A(2)}{3 - 2} = 5cm^2/cm$.





No item (a), quando o lado aumentou de $1\ cm$ para $2\ cm$, a área aumentou de $1\ cm^2$ para $4\ cm^2$, veja os 3 quadrados de acréscimo. E, no item (b), quando o lado aumentou de $2\ cm$ para $3\ cm$, a área aumentou de $4\ cm^2$ para $9\ cm^2$, veja os 5 quadrados de acréscimo.